

MATEMÁTICA

Explorando a **Geometria** e a **Álgebra** com
Realidade Aumentada



Thaise Cechinel Bozzelo Vassoler
Ananda Muxfeldt Palma
Marcia Martins Szortyka
Juliana Pires da Silva
Eliane Pozzebon



MATEMÁTICA

Explorando a **Geometria** e a **Álgebra** com
Realidade Aumentada

Realização:

LabTeC – UFSC | Laboratório de Tecnologias
Computacionais

Área do Conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª Edição
Araranguá,
2025



Thaise Cechinel Bozzelo Vassoler
Ananda Muxfeldt Palma
Marcia Martins Szortyka
Juliana Pires da Silva
Eliane Pozzebon



MATEMÁTICA

Explorando a **Geometria** e a **Álgebra** com
Realidade Aumentada

Idealização e Conteúdo

Thaise Cechinel Bozzelo Vassoler
Ananda Muxfeldt Palma
Marcia Martins Szortyka
Juliana Pires
Eliane Pozzebon

Projeto Gráfico e Experiência Visual

Ananda Muxfeldt Palma

Revisão Gramatical e Ortográfica

Karla Goularte da Silva Gründler

Apoio Técnico

Débora Maria Russiano Pereira

510 Matemática: explorando a geometria e a álgebra com
Aumentada / Thaise Cechinel Bozzelo Vassoler... [et al.]. -
Araranguá : LabTeC, 2025.
M425 124 p. : il.

ISBN: 978-65-01-86181-4

1. Matemática. 2. Aprendizagem interativa. 3. Realidade
Aumentada. I. Palma, Ananda Muxfeldt. II. Szortyka, Marcia
Martins. III. Silva, Juliana Pires da. IV. Pozzebon, Eliane. V. Título

Apresentação

Prezado(a)s professore(a)s e estudantes,

O mundo contemporâneo nos convida a descobrir a matemática de uma forma completamente nova e interativa. Aprender e ensinar, hoje, é criar pontes entre o conhecimento e a curiosidade, tornando cada conceito uma experiência envolvente e transformadora.

Este material didático foi cuidadosamente desenvolvido para ser um aliado de todos: professores encontrarão aqui uma ferramenta poderosa para dinamizar suas aulas, enquanto estudantes descobrirão que a matemática pode ser visual, divertida e surpreendente através da Realidade Aumentada (RA).

Com a tecnologia de RA, conceitos que antes pareciam abstratos ganham vida diante dos seus olhos. Vocês poderão visualizar e manipular objetos tridimensionais, explorar gráficos dinâmicos e resolver problemas de forma imersiva, transformando o aprendizado em uma verdadeira aventura matemática.

Esta obra está em sintonia com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), desenvolvendo competências essenciais para o século XXI. A abordagem inovadora fortalece a visualização espacial, promove o letramento digital e estimula a criatividade e autonomia na resolução de problemas, preparando todos para os desafios do futuro.

Esperamos que esta jornada matemática seja inspiradora e transformadora para professores e estudantes, criando momentos de descoberta e aprendizado significativo.

Boa jornada matemática!

As Autoras

Sumário



CAPÍTULO

01

Ângulos e Retas

1.1. Ângulos	06
1.2. Retas	10
1.3. Retas Paralelas e seus Ângulos	14
1.4. Teorema de Tales	20

CAPÍTULO

02

Polígonos e Áreas

2.1. Polígonos Regulares	24
2.2. Triângulos	30
2.3. Quadriláteros Notáveis	35
2.4. Áreas de Superfícies Planas	39

CAPÍTULO

03

Relações Geométricas nos Triângulos

3.1. Elementos e Pontos Notáveis nos Triângulos	45
3.2. Ângulos no Triângulo	52
3.3. Teorema de Pitágoras	54

CAPÍTULO

04

Poliedros

4.1. Prismas	59
4.2. Pirâmides	65
4.3. Relação do Volume de Prismas e Pirâmides	68





CAPÍTULO
05

Sólidos de Revolução

5.1. Cilindros	73
5.2. Cones	75
5.3. Esferas	79
5.4. Relação entre Volumes do Cilindro e do Cone	81

CAPÍTULO
06

Equações e Inequações:

6.1. Equações	87
6.2. Inequações	89

CAPÍTULO
07

Funções Elementares:

7.1. Noção de Funções	92
7.2. Função do 2º grau	98
a. Raízes da Função	99
b. Concavidade da Parábola	100
c. Vértice da Parábola	101
7.3. Trigonometria na Circunferência	104
a. Funções Trigonométricas	104
7.4. Função Exponencial	111

CAPÍTULO
08

Frações

8.1. Definição de Frações	116
8.2. Operação com Frações	119



TEMA

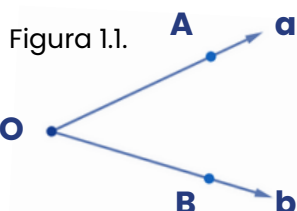
1

1.1.

Ângulos

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF06MA25



Um **ângulo** é definido como a região entre duas **semirretas** de mesma origem, não colineares, ou seja, que não estão contidas numa mesma reta. Podemos identificar o ângulo interno e o ângulo externo, dependendo da região considerada.

Para representar o ângulo da Figura 1.1, utilizamos a notação $\widehat{A\hat{O}B}$, em que O é o vértice do ângulo e os segmentos de reta \overline{OA} e \overline{OB} constituem seus lados.



- Para aprofundar seus conhecimentos de forma interativa, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- Em seguida, siga as instruções na tela para visualizar e explorar todos os **ângulos** em **Realidade Aumentada**.



• Como medir um ângulo?

Para desenhar ou medir um ângulo na geometria plana, utilizamos instrumentos como o **compasso** e o **transferidor**.

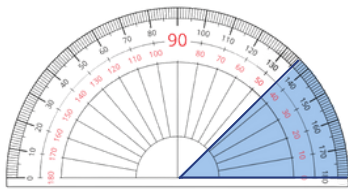
Como medir um ângulo com transferidor?

O **ângulo** é formado pela região entre duas **semirretas**. Para medi-lo com um **transferidor**, é necessário alinhar uma das semirretas com a marcação de 0° no instrumento e, em seguida, verificar o grau indicado pela posição da outra semirreta.

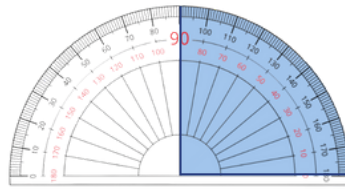
Os ângulos podem ser classificados de acordo com suas medidas em: **agudo**, **reto**, **obtusos** e **raso**.

A Figura 1.2 a seguir, mostra três transferidores destacando em **azul**, um ângulo de 45° (agudo), 90° (reto), e 120° (obtusos) respectivamente.

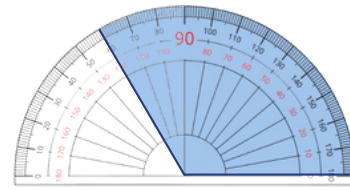
Veja as ilustrações a seguir:



Ângulo de 45°



Ângulo de 90°



Ângulo de 120°

Figura 1.2.

- Um ângulo é chamado de **agudo** quando sua medida está entre **0°** e **90°**.
- Na primeira tela, você encontrará os sinais de (+) e (-), como ilustrado na Figura 1.3.
- Clique no + e, em **vermelho**, aparecerão os ângulos **agudos** (Figura 1.4).

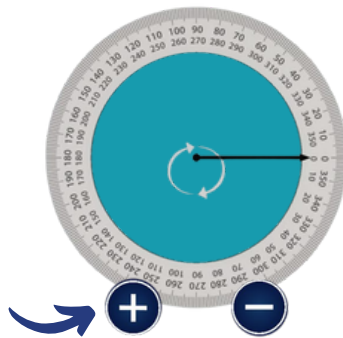


Figura 1.3.

Ângulo Agudo

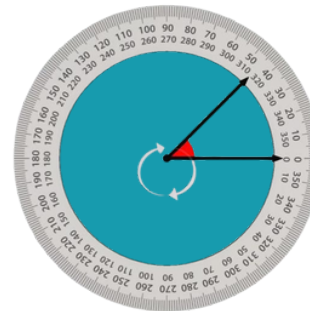


Figura 1.4.

- Quando possuí exatamente **90°** chamamos de **ângulo reto**.
- Na tela, o ângulo reto aparece em **verde** (Figura 1.5).
- Um ângulo é **obtuso** quando mede entre **90°** e **180°**.
- Os ângulos obtusos estão destacados em **azul**.

Ângulo Reto

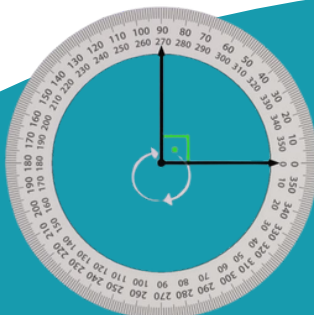


Figura 1.5.

Ângulo Obtuso

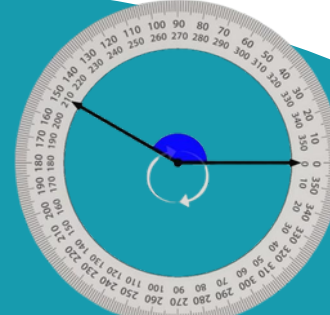


Figura 1.6.

- Na Figura 1.6, o ângulo marcado é de 120°.

Ângulo Raso Ângulo Côncavo Ângulo Inteiro

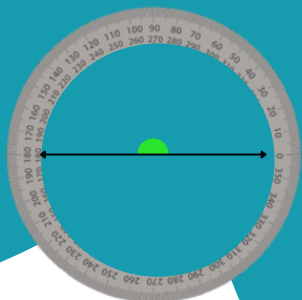


Figura 1.7.

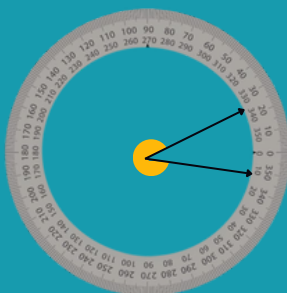


Figura 1.8.

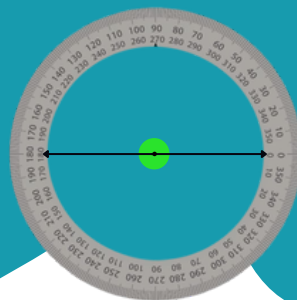


Figura 1.9.

- O ângulo de 180° é chamado de **raso**, destacado no transferidor em **verde** (Figura 1.7).
- Já o ângulo **côncavo** (sua medida está entre 180° e 360°), está destacado em **laranja** (Figura 1.8).
- E por último, há o ângulo **inteiro** (mede 360° , ou uma volta completa), destacado em **verde** (Figura 1.9).

Já quando comparamos **2 ângulos**, podemos classificá-los segundo a **soma** de suas medidas em:

- **complementares** (soma dos ângulos igual a 90°);
- **suplementares** (soma igual a 180°);
- **replementares** (soma igual a 360°).

Veja a Figura 1.10 a seguir:

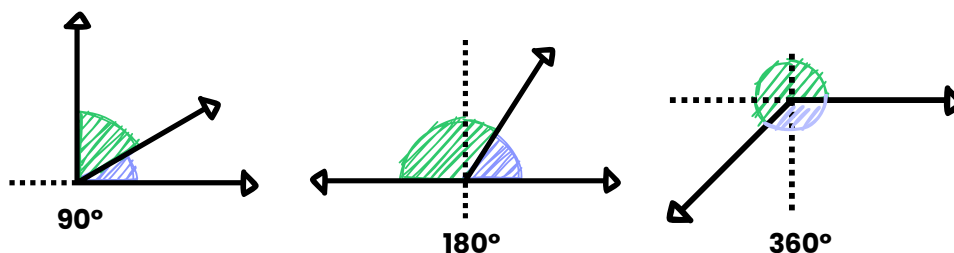


Figura 1.10.

Ainda, em relação aos dois ângulos, podemos denominá-los de:

- **congruentes**, quando possuem a **mesma** medida;
- **opostos pelo vértice**, ângulos congruentes que possuem o mesmo **vértice** e os lados de um ângulo são semirretas **opostas** aos lados do outro ângulo;
- **consecutivos**, quando possuem um lado **igual**;
- **adjacentes**, ângulos consecutivos que **não** possuem pontos internos comuns.

Sugestões de Atividades em Sala de Aula



Atividade 1: Jogo do Ângulo Misterioso

- **Objetivo:**
 - Estimular a estimativa e a precisão na medição de ângulos.
- **Passo a Passo:**
 1. Observe os ângulos que o professor desenhará na lousa ou projetará em imagens.
 2. Faça uma estimativa do valor de cada ângulo antes de medi-lo.
 3. Utilize o transferidor virtual para medir os ângulos.
 4. Compare os valores estimados com os medidos e verifique quem chegou mais próximo do valor real.

Atividade 2: Criação de desenhos com Ângulos

- **Objetivo:**
 - Explorar a criatividade na construção de imagens com referência complementar.
- **Passo a Passo:**
 1. Crie um desenho de um personagem, objeto ou paisagem utilizando apenas linhas retas. Use a criatividade!
 2. Meça e anote os ângulos formados no seu desenho com a ajuda do transferidor da plataforma.
 3. Compartilhe seu desenho com os colegas.
 4. Analise os diferentes ângulos encontrados nas produções da turma e compare os resultados.

• Referências:

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "**Ângulos**"; Brasil Escola. Disponível em:

<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/angulos.htm>. Acesso em 29 de setembro de 2025.

PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1**. 2.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

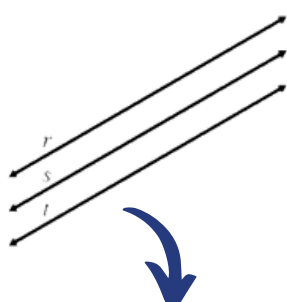




Retas

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF66MA22



Reta é um conjunto de pontos alinhados. Na geometria, sua representação corresponde a uma **linha única**, totalmente reta, que se estende infinitamente em ambas as direções, sem qualquer curvatura ao longo de seu percurso.

- Para aprofundar seus conhecimentos de forma interativa, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- Em seguida, siga as instruções na tela para visualizar e explorar todos as **retas** em **Realidade Aumentada**.

Segundo as posições relativas entre duas retas distintas, podemos classificá-las em:

1. Retas Paralelas:

- Quando não possuem **nenhum ponto em comum**, ou seja, são retas que estão no mesmo plano e que, se prolongadas indefinidamente em ambas as direções, mantêm a **mesma distância entre si**.

O símbolo usado para representar é: **//**.

Na primeira tela, aparecem três retas paralelas, ilustrado na Figura 1.11.

- Com os dedos em pinça, **clique** no meio da figura e conseguirá perceber a propriedade principal que caracteriza tais retas, pois ao ampliar, reduzir ou girar a imagem, as retas **mantêm o distanciamento entre si**.

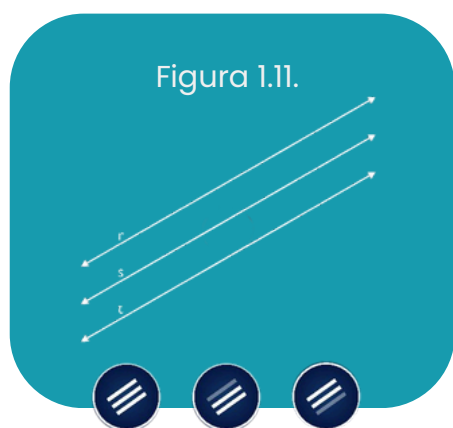
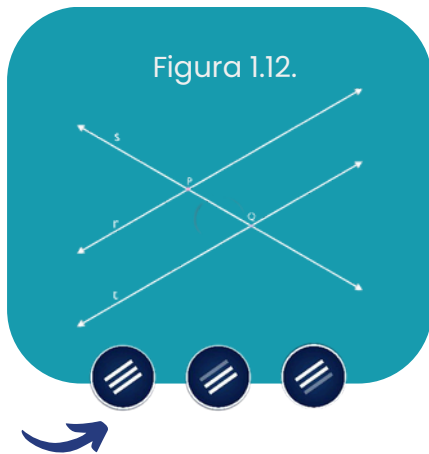
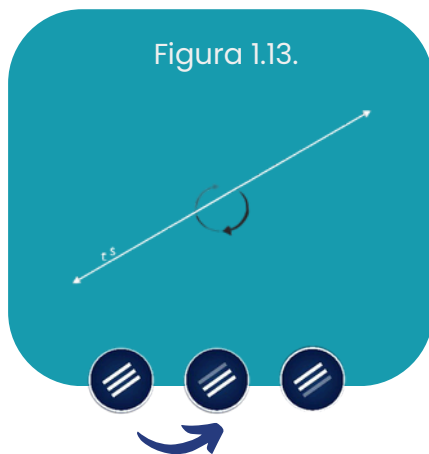


Figura 1.11.



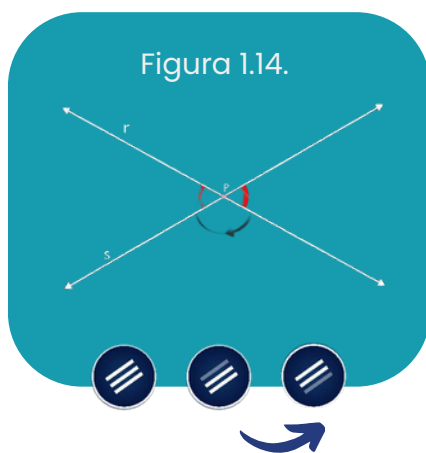
2. Retas Transversais:

- Dado um feixe de retas paralelas, chamamos de **reta transversal** aquela que **intersecta essas retas**. Na imagem, as retas **r** e **t** são paralelas.
- Observe que ambas são **cortadas pela reta s**, portanto, dizemos que a reta **s** é uma **reta transversal** às retas paralelas. Se o ângulo formado pelos vértices for de 90° , dizemos que as retas são **perpendiculares**.
- Para visualizar, clique no **primeiro círculo** indicado pela **seta** na Figura 1.12.



3. Retas Coincidentes:

- São as retas que possuem **todos os seus pontos em comum**.
- Para visualizar estas retas, clique no **segundo círculo** indicado na Figura 1.13.
- Você verá a animação que demonstra duas retas tornando-se **coincidentes**, ou seja, se sobrepondo e ocupando o mesmo lugar no espaço.

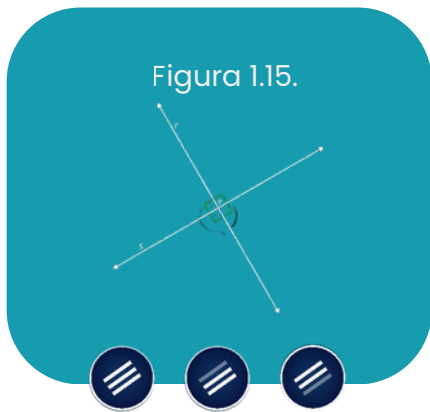


4. Retas Concorrentes:

- Quando as retas possuem um **único ponto em comum**, ou seja, se cruzam em um único lugar, chamado de **vértice**. Observe a Figura 1.14
- Se o ângulo formado pelos vértices for de 90° dizemos que as retas são **perpendiculares**.

5. Retas Perpendiculares:

- Retas perpendiculares são duas retas que se **intersectam** formando **ângulos retos**, isto é, ângulos de 90° . Quando duas retas são perpendiculares, dizemos que elas possuem uma **interseção ortogonal** e utilizamos o símbolo \perp para representá-las.



- Para verificarmos essa característica, clicamos no **círculo** indicado na figura 1.14, e uma animação mostrará duas **retas concorrentes** e seus ângulos, que aparecem em **vermelho** e aumentam à medida que as retas se movimentam, até atingirem a medida de **90°** (Figura 1.15), momento em que, também, passam a ser chamadas de **Retas Perpendiculares**.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Identificando e Classificando Posições Relativas Entre Retas com Realidade Aumentada

- **Objetivo:**
 - Identificar e classificar corretamente as diferentes posições relativas entre retas.
- **Passo a Passo:**
 - 1. Distribuição dos Códigos QR*
 - O professor disponibiliza **QR Codes** aos alunos, contendo a representação de diferentes posições relativas entre:
 - **Retas Paralelas;**
 - **Retas Concorrentes;**
 - **Retas Coincidentes.**
 - 2. Exploração e Análise das Imagens em RA*
 - Os alunos utilizam **tablets** ou **celulares** para escanear os QR Codes.
 - 3. Classificação e Associação*
 - Em duplas ou grupos, eles observam as imagens e **anotam** as características das retas que aparecem.
 - O professor pode fornecer um **guia de perguntas** para direcionar a análise, como:
 - As retas se cruzam? Se sim, em quantos pontos?
 - Elas possuem a mesma direção ou inclinação?
 - Onde podemos encontrar exemplos desse tipo de reta no dia a dia?
 - 3. Classificação e Associação*
 - Após a observação, cada grupo **classifica** os tipos de retas conforme o que foi analisado.

- Cada grupo **justifica** sua escolha e **apresenta** um exemplo real que corresponda à classificação feita.
- As respostas podem ser registradas em um **formulário digital** (*Google Forms, Kahoot ou Quizizz*) para avaliar a compreensão do conteúdo.

3. Aplicação no Cotidiano

- Como tarefa extra, os alunos tiram fotos do ambiente escolar identificando exemplos de retas.



- Essas fotos podem ser organizadas em uma apresentação digital (*Google Slides, Canva ou PowerPoint*) para compartilhar com a turma.

4. Recursos Necessários

- Dispositivos móveis (tablets ou celulares);
- QR Codes com imagens em RA dos tipos de retas;
- Formulários digitais ou plataformas interativas para o quiz final.

• Referências:

PESCO,D.U; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1. 2.ed.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

PINHO, J.L.R; BATISTA, E; CARVALHO, N.T.B. **Geometria I. 2.ed.** Florianópolis, 2010. 330 p.
<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/angulos.html>
 Acesso em 28/02/2025.



TEMA

1

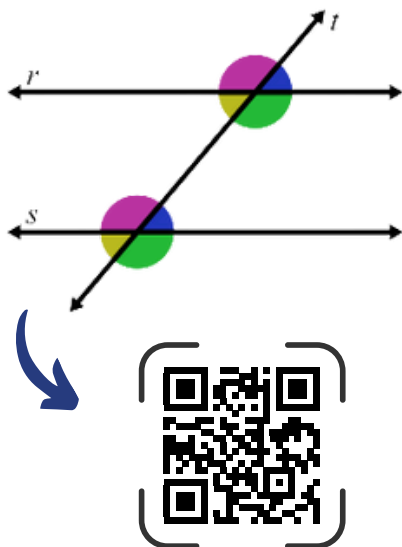
1.3.

Retas Paralelas e seus Ângulos

Por dentro da BNCC:

Habilidades:

EF09MA10
EF07MA23
EF07MA24



Retas paralelas são aquelas que nunca se encontram, independentemente de sua extensão.

- Ao desenharmos duas retas **r** e **s**, de modo que **r // s** (ou seja, “**r** é paralela a **s**”), e uma reta transversal **t** que cruza **r** e **s**, serão formadas oito ângulos.

Na ilustração ao lado, esses ângulos são:

- **2 azuis** • **2 amarelos**
- **2 rosas** • **2 verdes.**

- Para aprofundar seus conhecimentos de forma interativa, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- Em seguida, siga as instruções na tela para visualizar e explorar todos as retas paralelas e seus ângulos em **Realidade Aumentada**.

Ângulos Correspondentes:

- Baseados na imagem gerada pelo QR Code acima, podemos dizer que os ângulos de mesma cor são chamados de **Ângulos Correspondentes**. Estes ângulos possuem a mesma medida, desde que as retas cortadas pela reta transversal sejam **paralelas**.
- Ao abrir a imagem e clicar nos **círculos** que aparecem em cada cor da reta **r**, você verá que a medida dos ângulos encaixam perfeitamente nos ângulos formados na reta **s**, porque eles têm a mesma posição relativa.
- De acordo com o que aprendemos, podemos calcular o valor de **x** nas figuras, a seguir.

Exercício 1:

calcular x na figura.

- Considere a Figura 1.16, como $r \parallel s$, temos que os ângulos são **correspondentes**, logo suas medidas são iguais por isso:

$$2x + 50 = 4x - 30^\circ$$

$$2x - 4x = -30^\circ - 50^\circ$$

$$-2x = -80$$

$$x = 40^\circ$$

- Sendo 40° o valor de x , conseguimos descobrir qual a medida dos ângulos indicados em **verde**.

Para isso, substituímos o valor de x por 40° pelo ângulo **verde** da reta r :

$$2x + 50^\circ \rightarrow 2 \cdot 40^\circ + 50^\circ$$

$$80^\circ + 50^\circ = 130^\circ$$

- Como os ângulos **verdes** são correspondentes, concluímos que o ângulo **verde** da reta s , também mede 130° .
- Os ângulos coloridos de **rosa** são opostos pelo vértice dos ângulos coloridos em **verde**, desta afirmação podemos concluir que os ângulos **rosa** também medem 130° .
- Ao encontrarmos o valor de 50° para o ângulo **verde** podemos concluir que o **amarelo** medirá 130° pois os dois juntos formam um ângulo **raso** (180°).

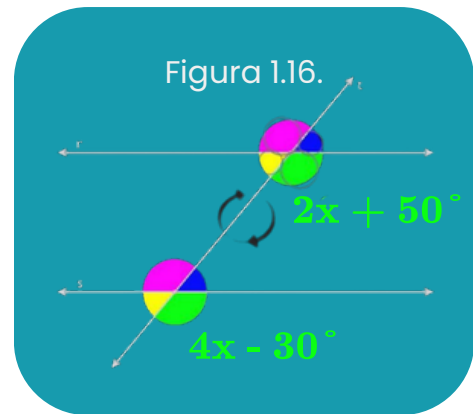
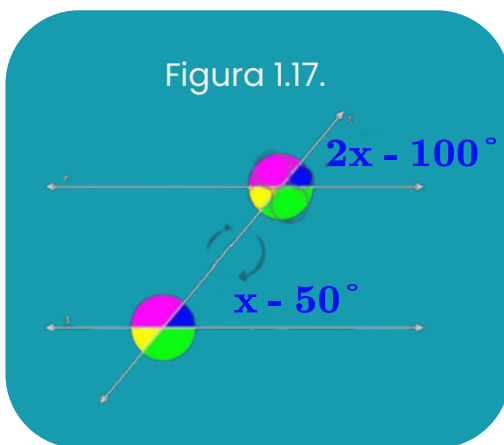


Figura 1.17.



Exercício 2:

- Considere a Figura 1.17, os ângulos **azuis** são **correspondentes**, logo possuem medidas iguais. Então, igualamos as duas expressões e calculamos:

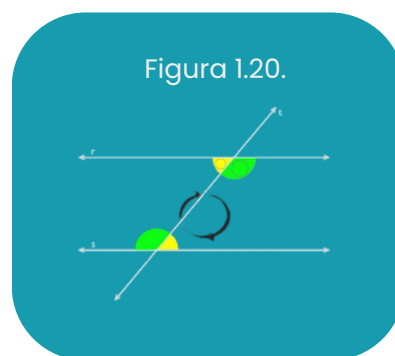
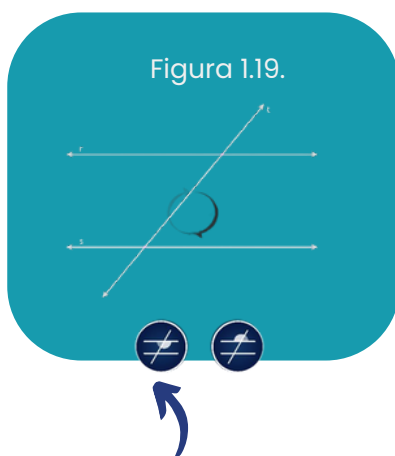
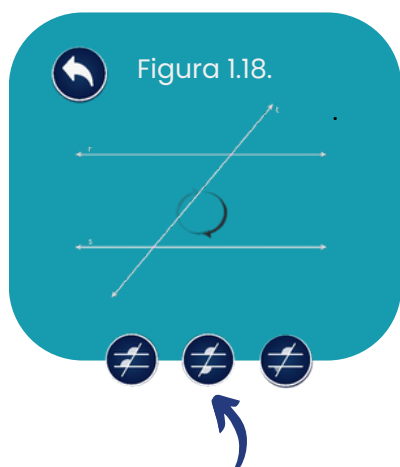
$$2x - 100^\circ = x - 50^\circ$$

$$2x - x = 100 - 50^\circ \rightarrow x = 50^\circ$$

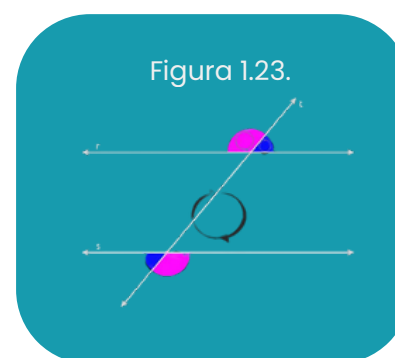
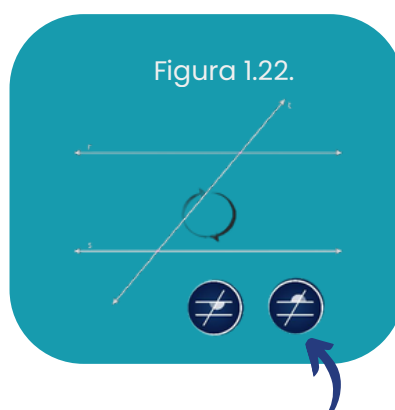
- Concluímos, portanto, que os ângulos **azuis** da reta r e s , respectivamente, medem 50° .
- Repare que ao somarmos a medida do ângulo **rosa** com o **azul** das respectivas retas obtemos um ângulo raso (180°). Isso sempre deverá acontecer.

- **Ângulos alternos** são pares de ângulos não adjacentes localizados em lados opostos de uma reta transversal que cruza duas outras retas.

- Eles podem ser **Alternos Internos** ou **Alternos Externos**. Veja:



- Ao abrir a plataforma, aparecerão os círculos abaixo da tela, clique no que está indicado pela flecha na Figura 1.18 acima e a segunda tela aparecerá.
- Clique no primeiro círculo (Figura 1.19) e em seguida clique nos ângulos **verde** e **amarelo**.
- Os ângulos em destaque são os **Alternos Internos**, conforme a Figura 1.20.
- Os ângulos alternos internos são aqueles que estão em lados alternados da reta transversal **t** e do lado interno em relação às paralelas **r** e **s**. Eles possuem a mesma medida, ou seja, os 2 **verdes** e os 2 **amarelos** têm a mesma medida entre si.



- Clique na flecha para voltar, indicada na Figura 1.21.
- Clique no segundo círculo indicado (Figura 1.22).
- Na tela aparecerão os ângulos **rosa** e **azuis** na reta **r**, clique sobre eles e surgirão os **Ângulos Alternos Externos** (Figura 1.23).

- Os dois ângulos **azuis** possuem a **mesma** medida, assim como os dois ângulos **rosa** possuem também o mesmo valor entre si.
- Os ângulos **alternos externos** estão em lados alternados em relação à transversal **t** e do lado externo em relação às paralelas **r** e **s**.

Exercício 1: calcular x na figura.

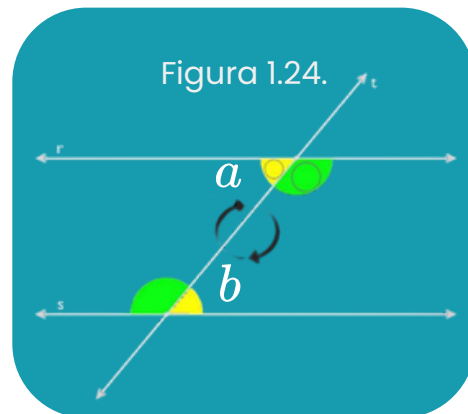
- Sejam $a = x + 42^\circ$ e $b = 2x + 15^\circ$, vamos calcular o valor de x .
- Pela Figura 1.24, sabemos que os ângulos são **alternos internos**, portanto, eles têm a mesma medida.
- Logo igualamos $a = b$ para encontrar o valor de x que tornará a igualdade verdadeira.

$$x + 42^\circ = 2x + 15^\circ$$

$$x - 2x = 15^\circ - 42^\circ$$

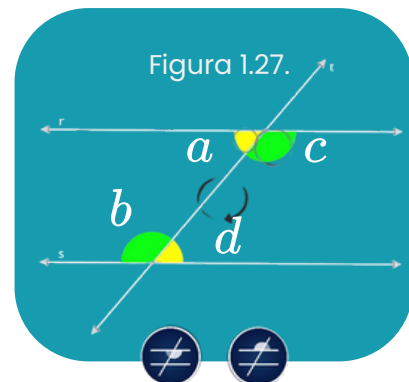
$$(-1) \cdot -x = -27^\circ \cdot (-1) \rightarrow x = 27^\circ$$

Concluimos que o ângulo **amarelo** de ambas as paralelas mede 27° .

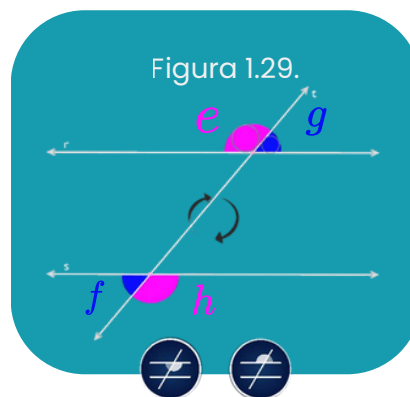



Ângulos Colaterais:

Os **ângulos colaterais** são pares de ângulos não adjacentes que se encontram do **mesmo** lado da reta transversal. Observe as Figuras 1.25, 1.26 e 1.27 abaixo:



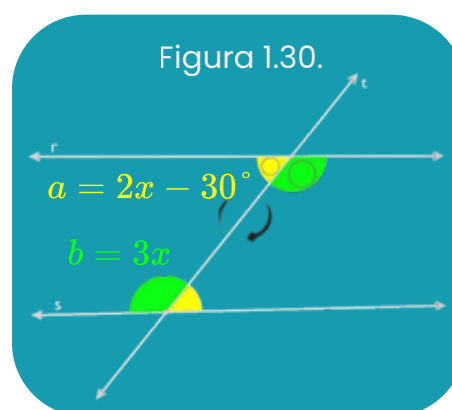
- A dupla de ângulos em destaque da Figura 1.27 (**a** e **b**, **c** e **d**), estão no mesmo lado em relação à reta transversal **t**, e na região interna das retas **r** e **s**. Por isso, são denominados **Colaterais Internos**.



- Ao clicar em , deve-se retornar para a tela anterior.
- Clicando no círculo indicado na Figura 1.28 acima e, em seguida, nos ângulos **azul** e **rosa**, observamos que a dupla de ângulos (**e** e **f**, **g** e **h**) está no mesmo lado em relação à reta transversal **t** e, na região externa das retas **r** e **s**, são denominados **Colaterais Externos** (Figura 1.29).
- Os pares de ângulos colaterais são **Suplementares**, ou seja, somam juntos **180°**.

Exercício 1:

- Na Figura 1.30, $r \parallel s$, vamos calcular os valores de **a** e **b** em graus, sabendo que $a = 2x - 30^\circ$ e $b = 3x$.



- Para iniciar os cálculos, partimos da propriedade que diz que os pares de ângulos **Colaterais** são **Suplementares**, ou seja, somam juntos **180°**.

Então:

$$a + b = 180^\circ \rightarrow 2x - 30^\circ + 3x = 180^\circ$$

$$5x = 180^\circ + 30^\circ \rightarrow 5x = 210^\circ$$

$$x = 42^\circ$$

- Encontrado o valor de x , substituímos nas equações da figura e encontramos valores de **a** e **b**:

$$a = 2x - 30^\circ \quad b = 3x$$

$$a = 2 \cdot 42^\circ - 30^\circ \quad b = 3 \cdot 42^\circ$$

$$\mathbf{a = 54^\circ} \quad \mathbf{b = 126^\circ}$$

- Portanto, os valores de **a** e **b** são, respectivamente, 54° e 126° . Perceba que sua soma resulta em 180° o que sempre deverá acontecer, já que são **suplementares**.



- **Referências:**

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Ângulos: o que são, tipos, casos particulares, exercícios**. Brasil Escola. Disponível em:

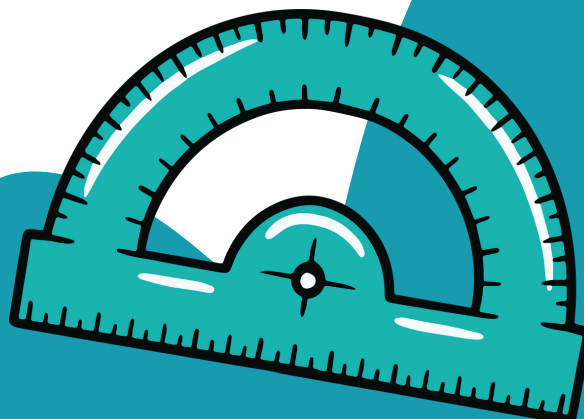
<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/angulos.htm>.

Acesso em: 28 fev. 2025.

PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1. 2.ed.** Rio de Janeiro:

Fundação CECIERJ, 2010.

PINHO, J.L.R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N.T.B. **Geometria I. 2.ed.** Florianópolis, 2010. 330 p.



1

1.4.

Teorema de Tales

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF09MA10

Por definição, **dois segmentos** são **proporcionais** a dois outros segmentos se a **razão** entre os dois primeiros for igual à razão entre os outros dois.

Observe a Figura 1.31.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Dos estudos de segmentos proporcionais surge o **teorema de Tales**; porém, para compreendê-lo, é necessário conhecer as seguintes definições:

- **Feixe de retas paralelas** → conjunto de retas paralelas coplanares entre si;
- **Transversal do feixe de retas paralelas** → reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe de retas paralelas;
- **Pontos correspondentes** → pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe de retas paralelas;
- **Segmentos correspondentes** → segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.

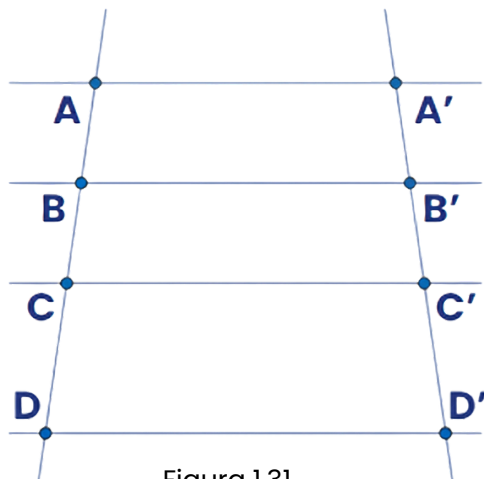


Figura 1.31.

Pontos Correspondentes

A e A' B e B'

C e C' D e D'

Segmentos Correspondentes

\overline{AB} e $\overline{A'B'}$ \overline{CD} e $\overline{C'D'}$

Com isso, temos a seguinte propriedade:

- Se duas retas são **transversais** a um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma dessas transversais é dividido em **p** partes **congruentes**, então, traçando por cada **ponto de divisão** uma paralela do feixe, o segmento correspondente da outra transversal:
 1. também é dividido em **p** partes;
 2. essas partes também são **congruentes** entre si.

Ou seja, se um feixe de retas paralelas tem duas transversais, então os segmentos congruentes de uma possuem como correspondentes segmentos congruentes na outra. Veja a Figura 1.32 a seguir:

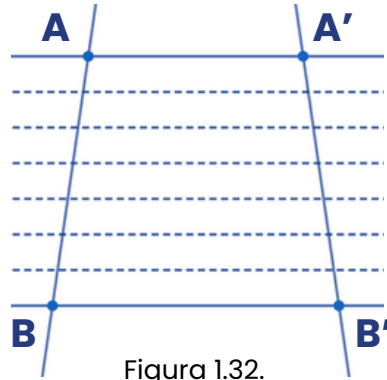


Figura 1.32.

Portanto, a definição do **Teorema de Tales** diz que:

“Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra”.

Conforme ilustrado na Figura 1.33 abaixo:

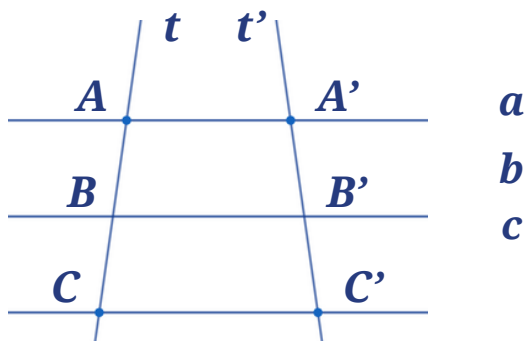


Figura 1.33.

1. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$
2. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$
3. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}}$

- Para aprofundar seus conhecimentos de forma interativa, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo verificando o teorema de Tales em **Realidade Aumentada**.

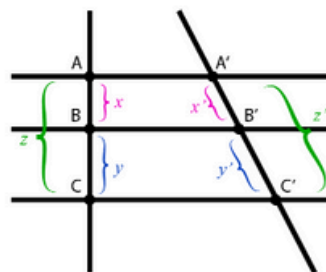
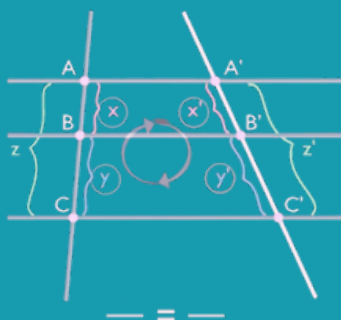


Figura 1.34.



A Figura 1.34, apresenta um feixe de **três retas paralelas** cortadas por **duas transversais**. Na primeira transversal, identificam-se os pontos **A, B e C**, com os segmentos correspondentes: **$\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ e $\overline{AC} = z$** .

De maneira análoga, na segunda transversal são determinados os pontos **A', B' e C'**, correspondendo aos segmentos **$\overline{A'B'} = x'$, $\overline{B'C'} = y'$ e $\overline{A'C'} = z'$** .


- Ao clicar em uma das incógnitas (**x, y, z, x', y'** ou **z'**) a sua medida correspondente na outra transversal se transfere para a igualdade abaixo. Veja a Figura 1.34. acima.

Figura 1.35.



- Em seguida, ao clicar em outra incógnita, a medida correspondente a ele se enquadra na igualdade (Figura 1.35).

$$\frac{z}{x} = \frac{z'}{x'}$$

- Ao clicar em , pode-se selecionar os outros segmentos para visualizar todas as proporcionalidades citadas no Teorema de Tales.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Revisão e Consolidação

- Consolidar os principais conceitos teóricos e fórmulas apresentados no capítulo, aplicando o conhecimento adquirido na resolução de exercícios para identificar e esclarecer dúvidas remanescentes.

• Referências:

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1. 2.ed.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.



Capítulo 2: Polígonos e Áreas



Polígonos Regulares

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF06MA18

Um **polígono** é definido como a figura formada a partir da união de pelo menos **três pontos consecutivos, distintos e não colineares**.

- Em qualquer **polígono**, temos os seguintes elementos:
 - **Vértices**: os pontos formadores da figura;
 - **Lados**: os segmentos de reta que unem 2 vértices consecutivos;
 - **Ângulos**: ângulos formados na união entre 2 lados consecutivos.

Na Figura 2.1. abaixo, ilustramos os vértices, lados e ângulos de um triângulo:

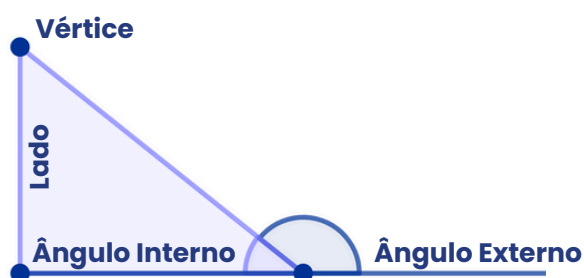


Figura 2.1. Elementos do triângulo.

Portanto, um polígono de **n** vértices possui **n** lados e **n** ângulos. De acordo com esse número **n** de lados, podemos classificar os polígonos em:

- **Triângulo** $n = 3$
- **Quadrilátero** $n = 4$
- **Pentágono** $n = 5$
- **Hexágono** $n = 6$
- **Heptágono** $n = 7$
- **Octógono** $n = 8$
- **Eneágono** $n = 9$
- **Decágono** $n = 10$
- **Undecágono** $n = 11$
- **Dodecágono** $n = 12$
- **Icoságono** $n = 20$

Além disso, podemos classificar os polígonos em **convexos** e **côncavos**. Um polígono é chamado de **convexo** se cada reta determinada por 2 vértices consecutivos deixa todos os demais vértices num mesmo **semiplano**. Se isso não for uma verdade, chamamos o polígono de **côncavo**. As Figuras 2.2 e 2.3 ilustram esses conceitos:

Polígono Convexo

— Segmento Interno

Todos os segmentos de reta com extremidades internas e permanecem totalmente dentro do polígono

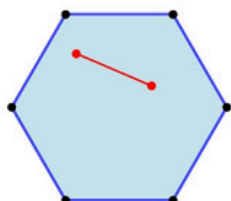
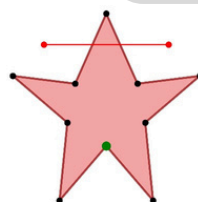


Figura 2.2.

Polígono Côncavo

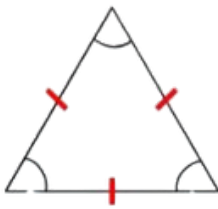
● Vértice Côncavo
— Segmento que sai



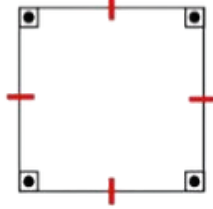
Existe, pelo menos, um segmento de reta com extremidades internas que passa por fora do polígono

Figura 2.3.

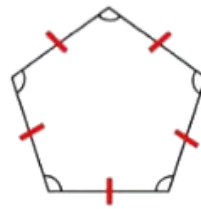
Dentre os polígonos convexos, temos os **polígonos regulares**, que são aqueles **equiláteros** (possuem todos os lados congruentes) e **equiângulos** (todos os seus ângulos são congruentes). Veja abaixo alguns exemplos de polígonos regulares:



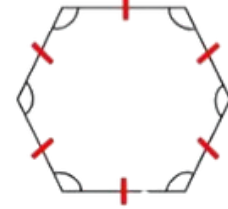
Triângulo Regular



Quadrilátero Regular



Hexágono Regular



Pentágono Regular

O termo **diagonal** se refere a um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos de um polígono, ou seja, toda união entre 2 vértices (com exceção dos lados), como é possível observar na Figura 2.4. O **ângulo interno** é determinado, como já dito, pela união entre 2 lados consecutivos. E o **ângulo externo** é dado pelo ângulo suplementar adjacente a um ângulo (interno) do polígono.

- Podemos calcular o **número total de diagonais** de qualquer polígono pela expressão:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

- Em palavras, significa que cada vértice possui **$(n-3)$** diagonais, portanto, são **$n \cdot (n-3)$** diagonais possíveis. Porém, como cada diagonal foi contada 2 vezes, precisamos dividir por 2.

Outros cálculos que possuem utilidade na Geometria são:

perímetro, soma dos ângulos internos e soma dos ângulos externos.

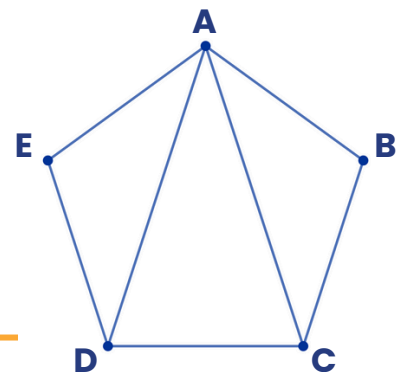
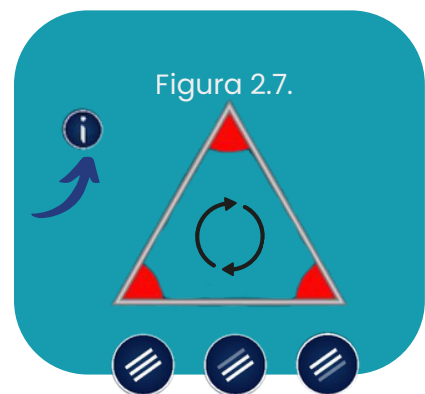
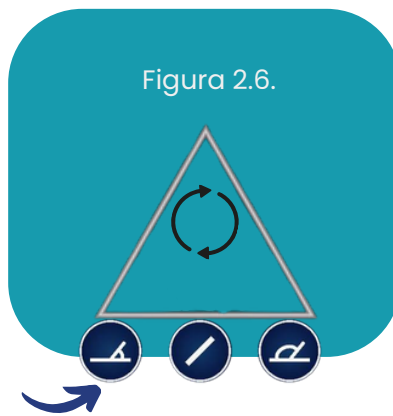
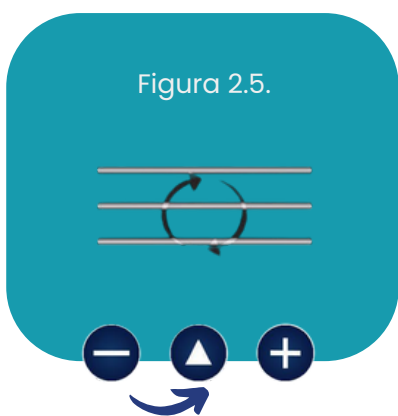
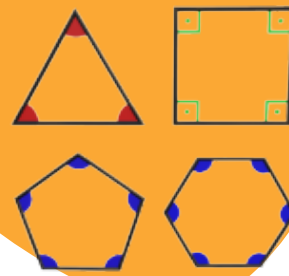


Figura 2.4. Polígono dividido em três triângulos.

- O **perímetro** é a soma das medidas dos lados desse polígono.
- A **soma dos ângulos internos** é calculada pela expressão $S = (n-2) \cdot 180^\circ$, pois para cada polígono de n lados podemos formar **$(n-2)$** triângulos (e a soma dos ângulos internos de um triângulo é **180°**).
- Já a **soma dos ângulos externos** é sempre igual a **360°** .

- Para aprofundar seus conhecimentos de forma interativa, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- Em seguida, siga as instruções na tela para visualizar e explorar todos os polígonos em **Realidade Aumentada**.



- Na tela inicial você encontrará **Figura 2.5** acima, perceba que aparecem **3 segmentos de retas**. Clique no **círculo com um triângulo** e uma animação transformará os segmentos em um triângulo (Figura 2.6).
 - Ao clicar no **primeiro círculo azul**, aparecerão em **vermelho** os ângulos internos do triângulo (Figura 2.7).
- Clicando no **i** próximo ao triângulo você verá a tela da Figura 2.8.

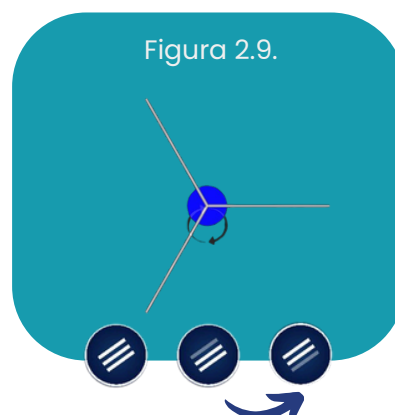
SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO REGULAR ($n = 3$)

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = (3 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 180^\circ$$

Figura 2.8.



- Esta tela apresenta a fórmula de cálculo da **Soma dos ângulos internos** de qualquer polígono.
- Ao clicar no terceiro **círculo azul**, podemos observar a soma dos ângulos externos do triângulo (**Figura 2.9**).
- Esse processo se repete **sempre** que, na tela inicial, você selecionar uma quantidade diferente de **segmentos de reta**.
- Para **4 segmentos**, teremos os ângulos internos, externos e as diagonais do **Quadrilátero**. A Figura 2.11, apresenta um quadrado formado por segmentos da Figura 2.10. Já a Figura 2.12 destaca em verde ângulos retos contidos no quadrilátero.



- A partir do quadrado teremos o ícone **i** na parte de **Diagonais**, onde aparecerá a fórmula usada para calcular o número de diagonais contidas no polígono.
- Nas Figuras 2.13 e 2.14, respectivamente, estão os ângulos externos e as diagonais do polígono formado com os quatro segmentos de reta. A Figura 2.15 demonstra o cálculo do número de diagonais em função do número de lados do polígono, conforme visualizamos ao clicar em "i".

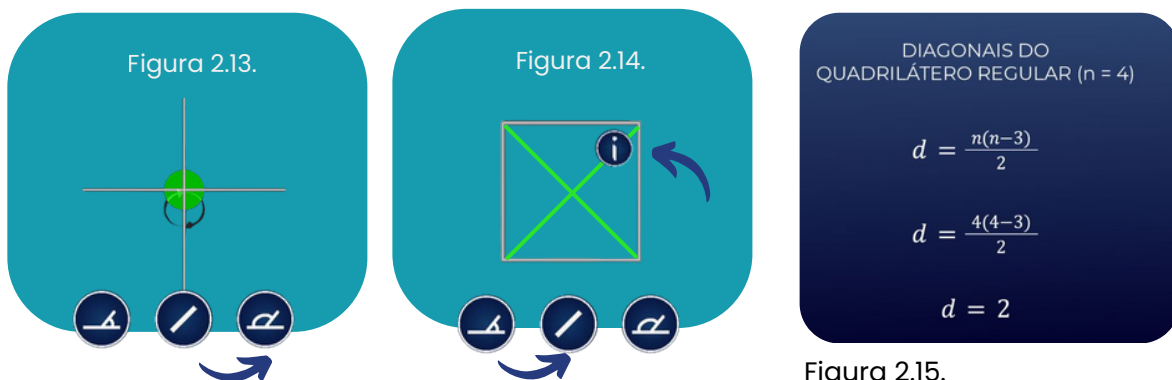
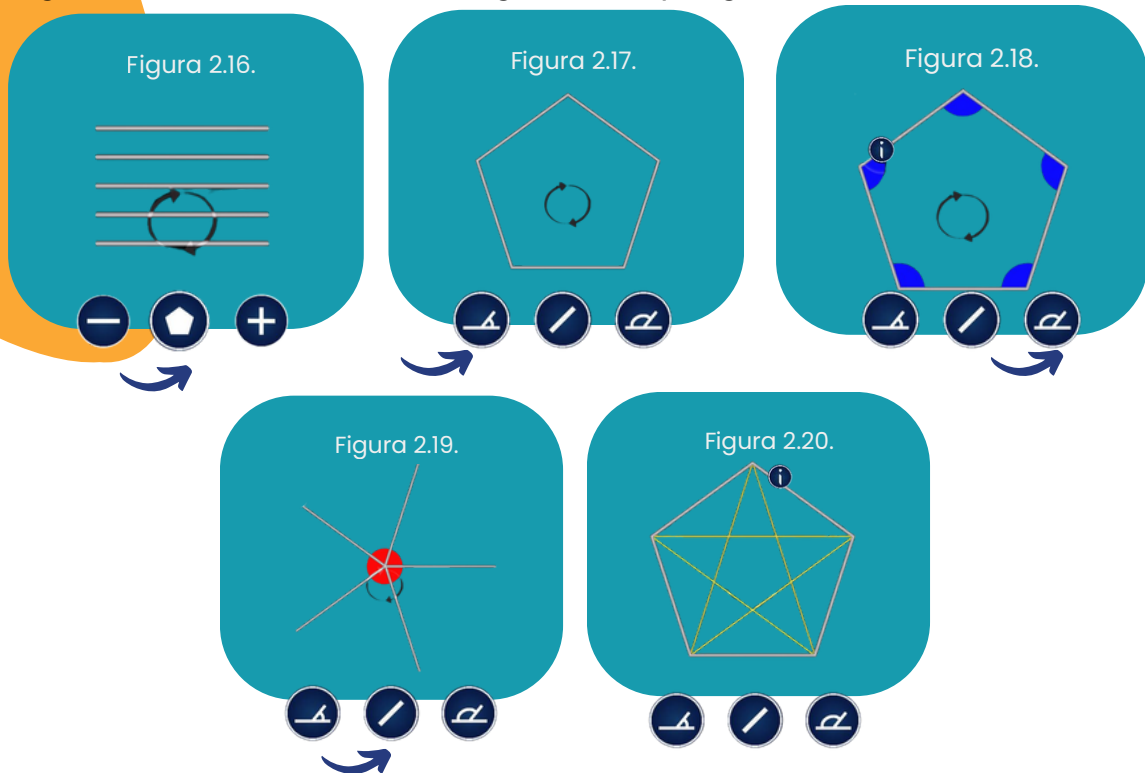


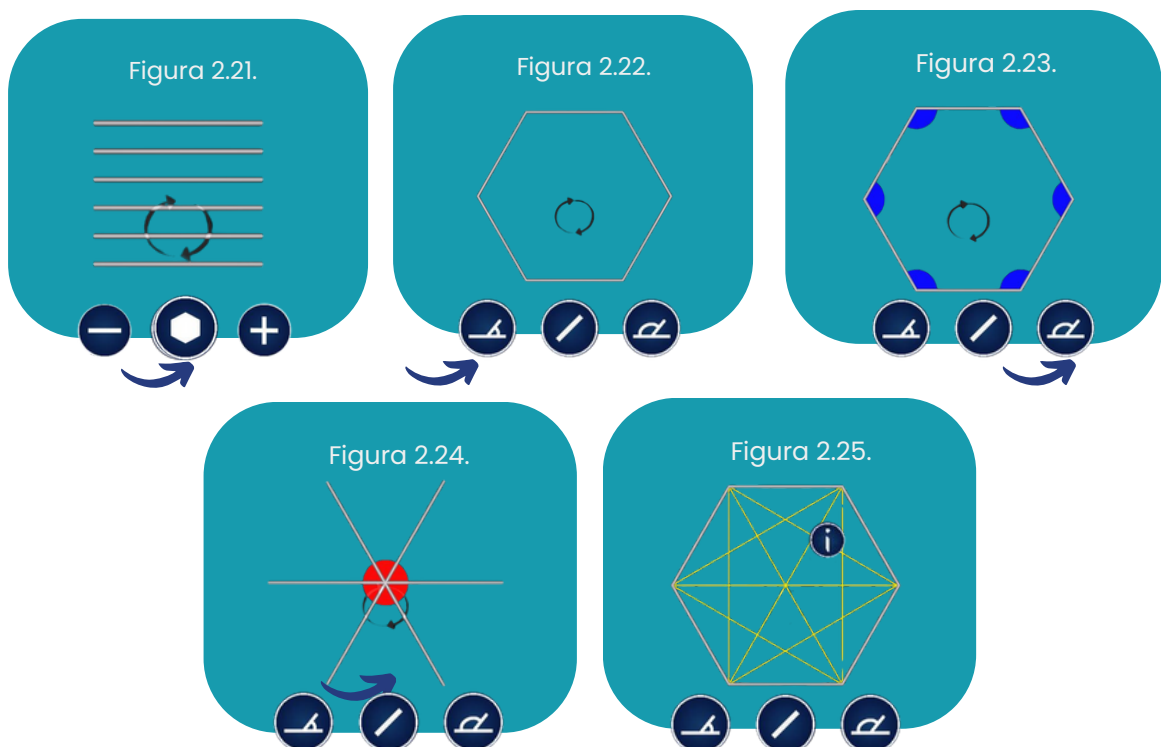
Figura 2.15.

- Para **5 segmentos**, teremos os ângulos internos, externos e as diagonais do **Pentágono** (Figura 7.1).
- A Figura 2.16 apresenta 5 segmentos de reta que durante a animação se transformam no pentágono regular da Figura 2.17. Na Figura 2.18, os ângulos internos do pentágono estão destacados em **azul**.

- Na Figura 2.19, estão representados a soma dos ângulos externos, e na Figura 2.20, destaca-se as diagonais do polígono.



- Para **6 segmentos**, teremos os ângulos internos, externos e as diagonais do **Hexágono**.
- A Figura 2.21 apresenta seis segmentos de reta que, durante a animação, transformam-se no hexágono regular da Figura 2.22. Na figura 2.23, os ângulos internos do hexágono estão destacados em **azul**, já na Figura 2.22, estão em destaque a soma dos ângulos externos, em **vermelho**. Por final, na Figura 2.25 estão as diagonais do poliedro.



Sugestões de Atividades em Sala de Aula



Atividade 1:

Dobradura Matemática

Passo a Passo:

- Forneça folhas de papel coloridas e peça para os alunos dobrarem e cortarem polígonos regulares (hexágonos, pentágonos, etc.).
- Eles devem marcar os ângulos internos e externos com núcleos diferentes e medir com transferidor.
- No final, discutimos as fórmulas para calcular os ângulos internos e externos.

Atividade 2:

Caça aos Ângulos

Passo a Passo:

- Projete imagens de objetos do cotidiano (placas, vitrais, mosaicos) e peça para os alunos identificarem polígonos e destacarem seus ângulos internos e externos.
- Os alunos medem e comparam os ângulos ou contam diagonais, verificando a relação matemática envolvida.

Atividade 3: Desafio do Caminho Mínimo

Passo a Passo:

- No quadro ou em um papel grande, desenhe um polígono e marque alguns pontos nos vértices.
- Os alunos devem traçar diagonais ligando os pontos sem repetir caminhos.

Atividade 4:

Quiz Interativo

Passo a Passo:

- Divida a turma em duas equipes.
- Faça perguntas sobre ângulos internos, externos e diagonais de polígonos que estão ilustrados no aplicativo.
- A equipe que responder mais perguntas corretamente vence a competição.

Referências:

PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1. 2.ed.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

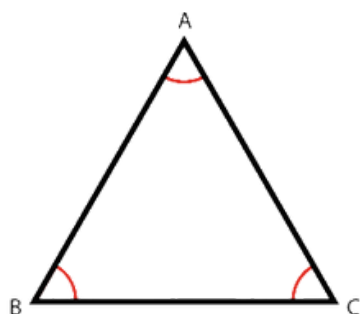
PINHO, J.L.R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N.T.B. **Geometria I. 2.ed.** Florianópolis, 2010. 330 p.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Triângulos.** Mundo Educação, [s.d.]. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/triangulos.htm>. Acesso em: 2 out. 2025.

Triângulos

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF06MA25



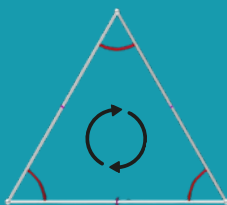
Os **triângulos** são **polígonos** com três lados e três vértices. Existem diversas formas diferentes de classificar triângulos, sendo as mais comuns pela **medida de seus lados** e pelos **ângulos dos vértices**.

- Para aprofundar seus conhecimentos de forma interativa, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- Em seguida, siga as instruções na tela para visualizar e explorar todos os triângulos em **Realidade Aumentada**.

Classificação dos Triângulos pelo Comprimento dos Lados

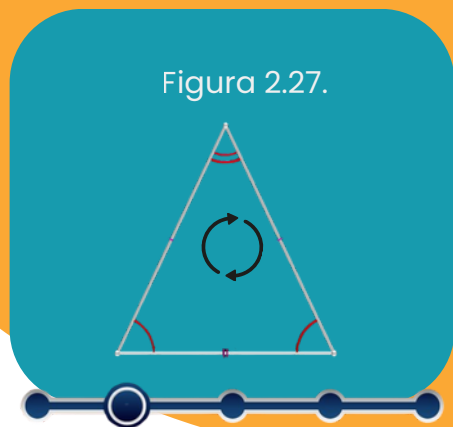
- Os triângulos podem ser classificados pelo comprimento de seus lados em três tipos:

Figura 2.26.



1. Triângulo Equilátero:

- Um triângulo **equilátero** tem todos os lados **iguais**.
- Ao abrir o ambiente online, você verá na tela um triângulo equilátero como na Figura 2.26.



2. Triângulo Isósceles:

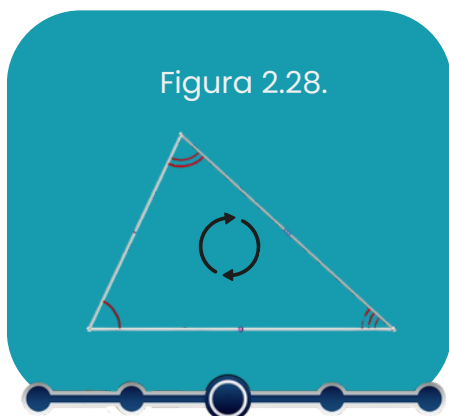
- Um triângulo **isósceles** tem dois lados iguais e **um lado diferente**.
- Ao arrastar o **círculo azul** para a direita, o triângulo vai se transformando até chegar no **segundo círculo** e ser um triângulo **isósceles**, como na Figura 2.27.

Observe na figura que o **triângulo isósceles** possui dois lados de mesma medida e dois ângulos na base com a mesma medida. Note que os ângulos iguais entre si e os lados iguais entre si estão representados por uma linha **vermelha**, e os lados, por um traço **vermelho**.

IMPORTANTE:



O lado diferente do triângulo isósceles fica sempre entre os dois ângulos iguais e recebe o nome de base.



3. Triângulo Escaleno:

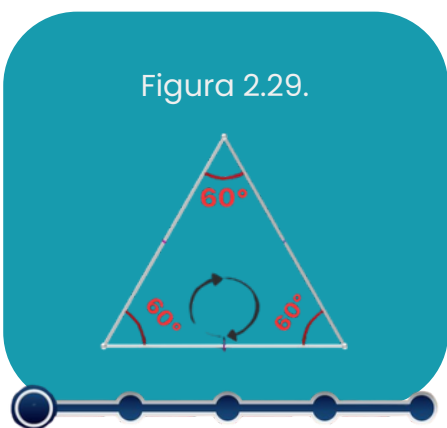
- Um triângulo **escaleno** tem **todos** os lados **diferentes**.
- Ao arrastar o **círculo azul** para a direita, o triângulo vai alterando as medidas transformando-se em um triângulo **escaleno**, como na Figura 2.28 ao lado.

- Perceba que na **figura 2.28**, temos um triângulo com três lados diferentes e três ângulos diferentes, os **lados diferentes** estão representados por 1, 2 ou 3 **linhas vermelhas**, assim como os **ângulos internos** do triângulo.

Classificação dos Triângulos pelos Ângulos dos Vértices

- Os triângulos também podem ser classificados pelos **ângulos de seus vértices** em três tipos:

Figura 2.29.



1. Triângulo Acutângulo:

- Um triângulo **acutângulo** tem todos os ângulos **menores que 90 graus**.
- Para visualizar um triângulo acutângulo no aplicativo, basta olhar novamente o triângulo **equilátero**. Ele é um exemplo de acutângulo, em que todos os ângulos dos vértices medem **60°**. Veja a Figura 2.29.

Figura 2.30.



2. Triângulo Retângulo:

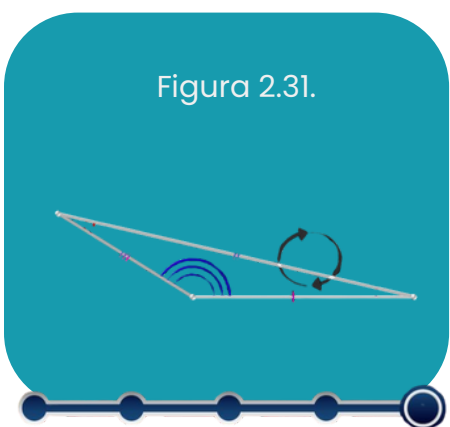
- Um triângulo **retângulo** tem um ângulo de **90 graus**.
- Ao arrastar o círculo azul para a **4ª posição**, observamos um triângulo retângulo como na Figura 2.30, em que o **ângulo reto (90°)** está representado pela **cor verde** e os dois ângulos agudos representados pela **cor vermelha**.

IMPORTANTE:



Um triângulo **retângulo** pode ser **isósceles** ou **escaleno**, porém **nunca** será **equilátero**.

Figura 2.31.



3. Triângulo Obtusângulo:

- Um triângulo **obtusângulo** tem um ângulo **maior que 90 graus**.
- Role o círculo azul para a direita novamente e verá o triângulo obtusângulo como na Figura 2.31. Nele, o **ângulo obtuso** (maior que 90°) está representado por **linhas azuis**.
- Assim como o triângulo retângulo, um triângulo obtusângulo pode ser isósceles ou escaleno, porém **nunca** será **equilátero**.



Propriedades dos Triângulos

- Existem muitas propriedades diferentes dos triângulos. Algumas das propriedades mais **importantes** incluem:
- A soma dos **ângulos internos** de um triângulo é sempre **180 graus**.
- O lado oposto ao **maior ângulo** de um triângulo é sempre o **maior lado**.
- O lado oposto ao **menor ângulo** de um triângulo é sempre o **menor lado**.
- A **altura** de um triângulo é sempre **perpendicular** à sua **base**.

Aplicação dos Triângulos

- Os triângulos têm muitas aplicações práticas. Algumas das aplicações mais comuns incluem:
 - **Engenharia:** Os triângulos são usados para projetar e construir pontes, edifícios e outras estruturas.
 - **Arquitetura:** Os triângulos são usados para projetar e construir casas, escolas e outros edifícios.
 - **Navegação:** Os triângulos são usados para determinar a localização de navios e aviões no mar.
 - **Topografia:** Os triângulos são usados para medir a elevação de montanhas e colinas.



Figura 2.32.

Aplicações dos triângulos na engenharia.

Fonte: Canva (2025).

Descrição: A cena retrata um grupo de quatro profissionais reunidos ao redor de uma mesa de trabalho situada em um canteiro de obras com grandes janelas ao fundo. Todos utilizam equipamentos de segurança, como coletes reflexivos verdes e capacetes nas cores amarelo, azul e vermelho. O foco do grupo está voltado para uma grande planta baixa de cor azul estendida sobre a mesa, onde uma das pessoas aponta para um detalhe específico, indicando uma análise técnica colaborativa e o planejamento do projeto de engenharia.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Caça ao Triângulo

- **Objetivo:**
 - Identificar triângulos no ambiente escolar usando a RA.
- **Materiais:**
 - Dispositivos celulares ou tablets.
- **Passo a Passo:**
 1. Os alunos devem usar o QR Code para identificar figuras triangulares no ambiente escolar, como por exemplo, na arquitetura, nos cartazes, nas imagens, na paisagem etc.
 2. Para cada triângulo encontrado, o aluno deve fazer um print e classificar o tipo de triângulo, conforme exemplo abaixo na Figura 2.33.
 3. Pode-se fazer uma disputa e ver quem foi o aluno que identificou maior número de triângulos ou quem conseguiu encontrar pelo menos um exemplo de cada classificação.

- **Discussão:**
 - Discuta com a turma as características dos triângulos encontrados e como eles se relacionam com o conteúdo estudado.

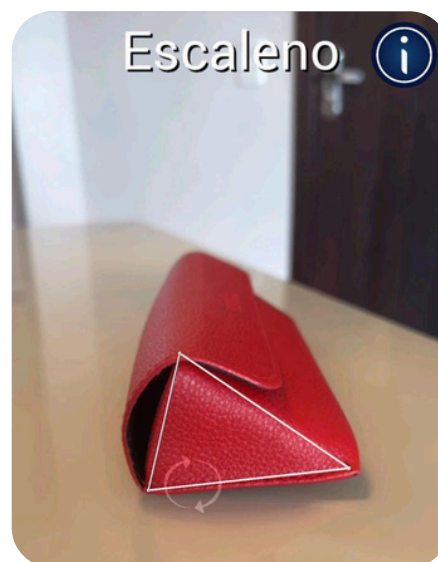


Figura 2.33. Um estojo de óculos que possui a forma de um triângulo escaleno em sua lateral.

Referências:

PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1. 2.ed.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
PINHO, J.L.R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N.T.B. **Geometria I. 2.ed.** Florianópolis, 2010. 330 p.

TEMA

2

2.3.

Quadriláteros Notáveis

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF06MA20

Propriedades dos Quadriláteros

Os **quadriláteros** são polígonos formados por quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos internos. De forma geral, todos os quadriláteros possuem uma característica comum: **a soma dos seus ângulos internos é sempre igual a 360°**. A classificação dos quadriláteros varia conforme a relação entre seus lados, ângulos e diagonais.

1. Quadriláteros Gerais

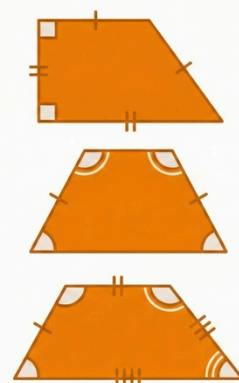
Um quadrilátero qualquer é aquele que não possui lados paralelos entre si. Esse tipo de quadrilátero não apresenta propriedades específicas além da soma dos ângulos internos. Ele serve como base para o entendimento dos demais quadriláteros.

2. Trapézios

Os **trapézios** são quadriláteros que possuem um **único par de lados paralelos**, chamados de **bases**. Eles podem ser classificados em:

- **Trapézio retângulo**: possui dois ângulos retos (90°);
- **Trapézio isósceles**: os lados não paralelos são congruentes e os ângulos da base também;
- **Trapézio escaleno**: todos os lados têm medidas diferentes.

Uma característica importante é que os ângulos adjacentes às bases são **suplementares**, ou seja, somam 180° .



3. Paralelogramos

Os **paralelogramos** são quadriláteros com dois pares de lados opostos paralelos. Eles apresentam diversas propriedades:

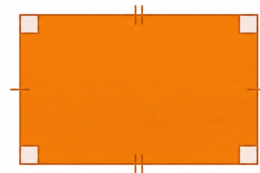
- Lados opostos são **congruentes**;
- Ângulos opostos são **iguais**;
- Ângulos adjacentes são **suplementares**;
- As diagonais se cruzam no **ponto médio**.



O grupo dos **paralelogramos** inclui figuras importantes como o **retângulo, o losango e o quadrado**.

3.1. Retângulo

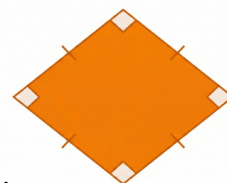
O **retângulo** é um caso particular de paralelogramo, em que todos os ângulos internos medem **90°**. Além disso, as diagonais de um retângulo são iguais em comprimento.



3.2. Losango

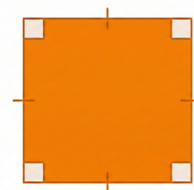
O **losango** é um paralelogramo com quatro lados iguais, além de ângulos opostos iguais. Suas propriedades incluem:

- Lados **congruentes**;
- **Diagonais perpendiculares** (formam ângulo de 90° entre si);
- Diagonais que **bissectam** os ângulos internos.

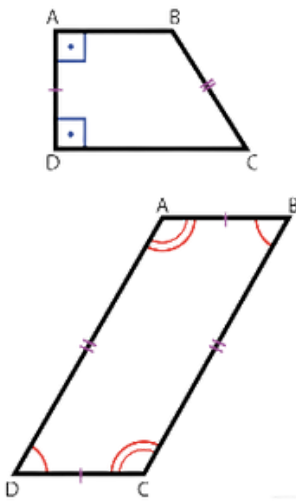


3.3. Quadrado

O **quadrado** reúne as propriedades do retângulo e do losango. Ele possui **quatro lados iguais** e **quatro ângulos retos**. Suas **diagonais** também são iguais, perpendiculares e bissectam os ângulos internos.



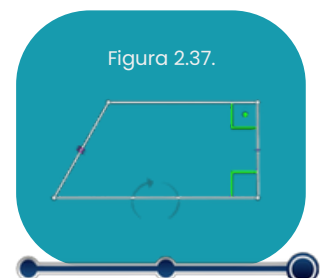
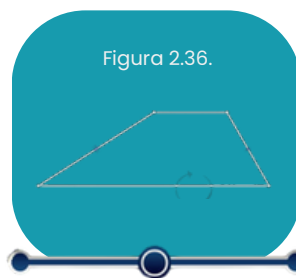
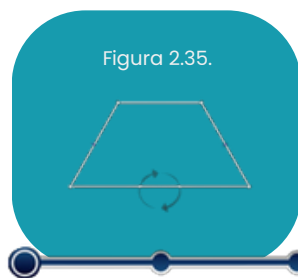
O estudo das **propriedades dos quadriláteros** permite entender melhor as relações entre os lados, ângulos e diagonais dessas figuras. Essa análise é fundamental para a resolução de problemas geométricos, tanto na matemática do ensino básico quanto em aplicações mais avançadas. Entre os quadriláteros temos alguns que se destacam e chamam-se Quadriláteros Notáveis, são eles: **trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado**.



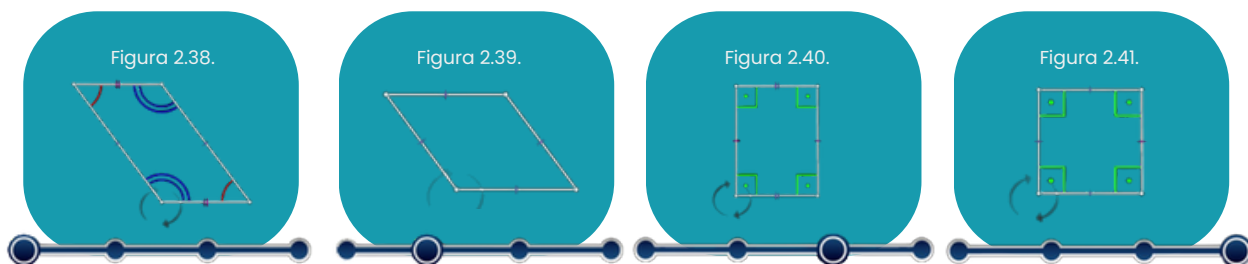
- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo, visualizando os quadriláteros notáveis e suas respectivas áreas em **Realidade Aumentada**.



- A primeira tela apresentará dois **quadriláteros**, sendo estes o **trapézio** e **paralelogramo**, conforme demonstrado abaixo:



- Clicando sobre o **trapézio** na figura 2.34 acima, é mostrado um trapézio inicialmente **isósceles** (Figura 2.35), ao rolarmos a barra localizada abaixo para a direita, o trapézio se torna **escaleno**, como fica explícito na Figura 2.36. Em seguida, ao continuarmos o rolamento da barra até o final, teremos um trapézio **retângulo**. Veja a Figura 2.37.



- Agora, clicando no **paralelogramo**, a princípio, veremos um paralelogramo, como na Figura 2.38. Rolando a barra para a direita, ele mostra o **losango** (Figura 2.39), em seguida um **retângulo**, ilustrado na Figura 2.40 e, por último, um **quadrado** (Figura 2.41), demonstrando assim, todas as características e propriedades citadas no conteúdo estudado acima.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



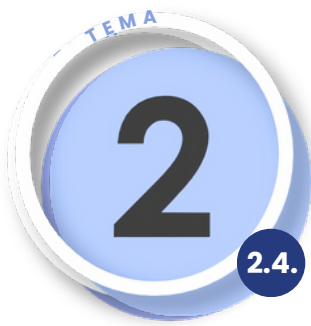
Atividade 1: Criação de Cenas com Quadriláteros

- **Objetivo:**
 - Aplicar os quadriláteros em contextos criativos.
- **Passo a Passo:**
 1. Os alunos devem criar pequenas histórias em papel ou digitalmente onde os personagens vivem em casas ou cenários formados por quadriláteros.
 2. Em seguida, escanear os elementos e explicar o porquê da escolha de cada figura com base nas propriedades geométricas.
 - **Exemplo:** uma casa com telhado losangular, por ser simétrico, e janelas retangulares, por causa dos ângulos retos.

- **Referências:**

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.
 OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "**Ângulos**"; Brasil Escola.
 Disponível em:
<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/angulos.htm>.
 Acesso em 05/03/2025.
 PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1**. 2.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.





Área das Superfícies Planas

Por dentro da BNCC:

Habilidades:

EF06MA21

EF08MA19

A **área** mede o espaço em duas dimensões: **comprimento** e **largura**. Por isso, suas unidades são sempre "quadradas" (metro quadrado, centímetro quadrado, etc.).

Unidade de Medida: A unidade padrão para medir a área é um quadrado com lados de comprimento 1. Por exemplo, um "metro quadrado" (m^2) é a área de um quadrado cujos lados medem 1 metro cada.

Calcular a área de uma figura é, essencialmente, determinar quantos desses quadrados unitários cabem dentro dela.

- O **trapézio** é um quadrilátero convexo que possui somente dois lados paralelos. Esses lados paralelos são chamados de **bases**. Podemos classificá-lo em:

1. Trapézio

O **quadrilátero** é um **polígono** de 4 lados, ou seja, é uma figura formada a partir da união de 4 pontos distintos sendo 3 não colineares.

Dentre os quadriláteros, temos como **notáveis**: **trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado**.

- **Trapézio isósceles**, se os dois lados não paralelos são congruentes;
- **Trapézio escaleno**, se esses dois lados não paralelos não são congruentes;
- **Trapézio retângulo**, se possui dois ângulos retos.

São **propriedades** do trapézio:

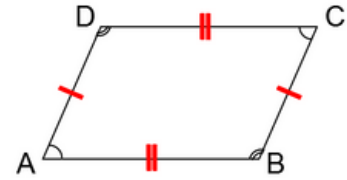
- O segmento de reta que une os pontos médios dos lados não paralelos é paralelo às bases, e sua medida é igual a metade da soma das medidas das bases;
- O segmento que une os pontos médios das diagonais é paralelo às bases, e sua medida é igual a metade da diferença das medidas das bases. Segue ilustrado na Figura 2.42.



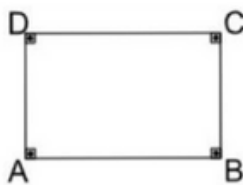
Figura 2.42.

2. Paralelogramo

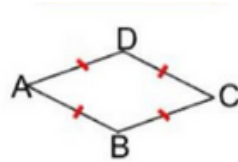
- O **paralelogramo** é definido por um quadrilátero convexo que possui os lados opostos paralelos.
- São propriedades do **paralelogramo**:
 - Os lados **opostos** são **congruentes**;
 - Os ângulos **opostos** são **congruentes**;
 - Dois ângulos consecutivos são **suplementares**;
 - As **diagonais** cortam-se ao meio.
- Dentre os paralelogramos, temos o:
 - **Retângulo**, seus quatro ângulos são retos, ou seja, um paralelogramo equiângulo (ângulos iguais);
 - **Losango**, seus lados e ângulos opostos são congruentes entre si, de dois em dois;
 - **Quadrado**, seus lados e ângulos são congruentes, ou seja, um paralelogramo equiângulo e equilátero, também chamado de **quadrilátero regular**.



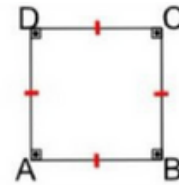
Paralelogramos Particulares



Retângulo



Losango



Quadrado

- Como propriedade do **retângulo**, temos que as diagonais são congruentes entre si.
- O **losango** tem como propriedades:
 - Diagonais são perpendiculares;
 - Diagonais são bissetrizes dos ângulos opostos.
 - Já o quadrado, por ser um losango e um retângulo, possui as propriedades relativas a eles.

Área dos Polígonos Notáveis:

- **Conceito de área:**

A área é uma grandeza geométrica que mede a extensão de uma superfície.

Em outras palavras, ela indica quanto espaço uma figura plana ocupa em um plano. O **cálculo da área** está relacionado à contagem de unidades de medida quadradas (como cm^2 , m^2 , etc.) que podem ser dispostas sobre uma figura sem sobreposição.

O conceito de **área** é desenvolvido a partir de situações concretas de medição e comparação de superfícies, evoluindo para expressões algébricas e fórmulas gerais no estudo de figuras planas, como **triângulos, retângulos, paralelogramos, trapézios e círculos**.

No ensino, compreender área vai além de aplicar fórmulas: envolve a compreensão do significado da **medida**, da **unidade** utilizada e da relação entre figuras equivalentes.

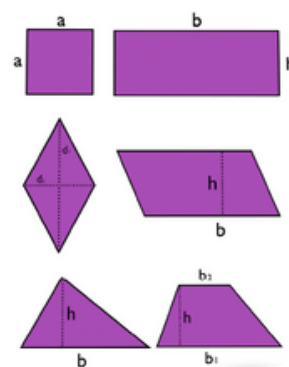
- **Definição Matemática:**

Em termos matemáticos, a área A de uma figura plana é o valor numérico que representa a **medida da superfície** delimitada por essa figura.

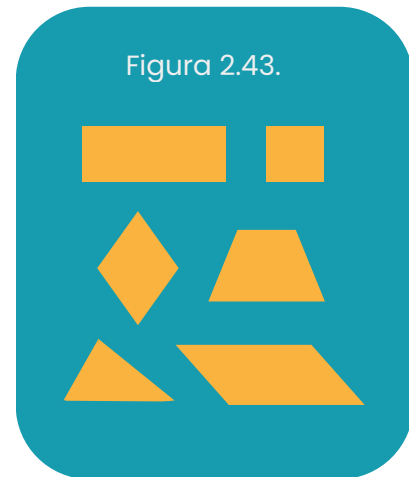
Por exemplo, para um **retângulo** de base b e altura h , temos:

$$A = b \cdot h$$

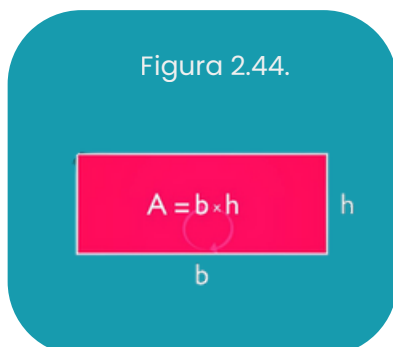
- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando as áreas das figuras planas em **Realidade Aumentada**.



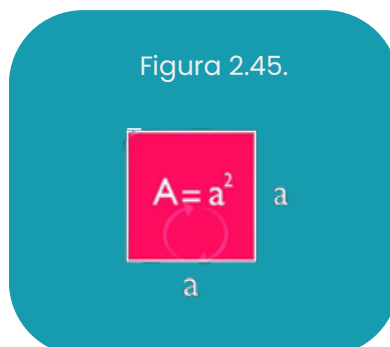
- A primeira tela mostra os polígonos conforme a Figura 2.43 ao lado.
- Clicando sobre cada um dos quadriláteros, uma animação demonstrará a fórmula para o **cálculo da área de cada um deles**.
- A área do retângulo é dada pelo produto de suas dimensões, **base** vezes **altura** (Figura 2.44).



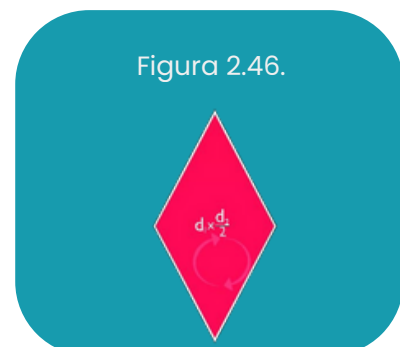
- Assim como no retângulo, a área do quadrado é o produto de suas dimensões, porém, como as dimensões do quadrado são sempre iguais, sua área é **lado vezes lado**, visto na Figura 2.45.
- Para o losango, temos a área como **metade do produto das duas diagonais** da Figura 2.46.
- Na Figura 2.47, é ilustrada a área do trapézio, que é calculada como a **metade da soma das bases multiplicada pela altura**.
- A área do triângulo é a **metade do produto da base pela altura** (Figura 2.48).
- O paralelogramo, visto na Figura 2.49, possui a mesma fórmula da área do retângulo.



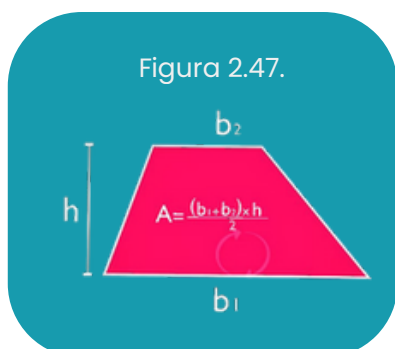
Retângulo



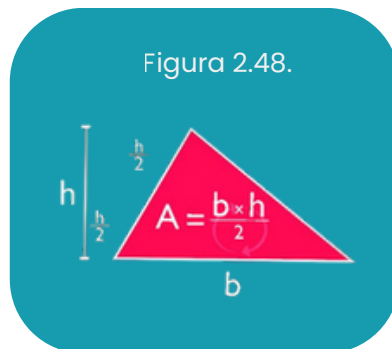
Quadrado



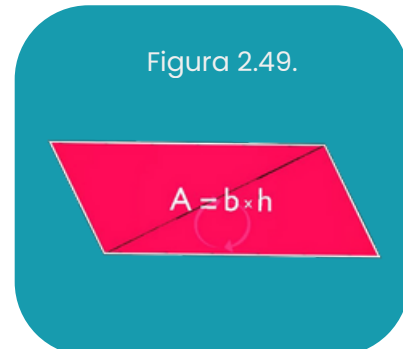
Losango



Trapézio



Triângulo



Paralelogramo

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Áreas Planas

• Objetivo:

- Desenvolver habilidades de medição e aplicar fórmulas de cálculo de área de figuras planas.

• Passo a Passo:

1. Ir ao pátio da escola

- Os alunos devem ser levados ao pátio para uma atividade prática de observação.

2. Observar o ambiente

- Observar com atenção o que há ao redor e identificar figuras geométricas planas no espaço, como:
 - Retângulos em bancos,
 - Quadrados no piso,
 - Círculos em bases de postes ou luminárias.

3. Medir as figuras

- Usar fitas métricas para medir os lados, diâmetros ou outros elementos importantes das figuras encontradas.

4. Anotar as medidas

- Registrar no caderno as medidas obtidas, organizando as informações de forma clara e legível.

5. Voltar para a sala

- Com os registros prontos, os alunos devem retornar à sala para continuar a atividade.

6. Reproduzir os desenhos

- No caderno, desenhar as figuras geométricas observadas, utilizando as medidas anotadas para manter a proporção.
- Usar as fórmulas de área estudadas anteriormente, para calcular a área de cada figura desenhada.

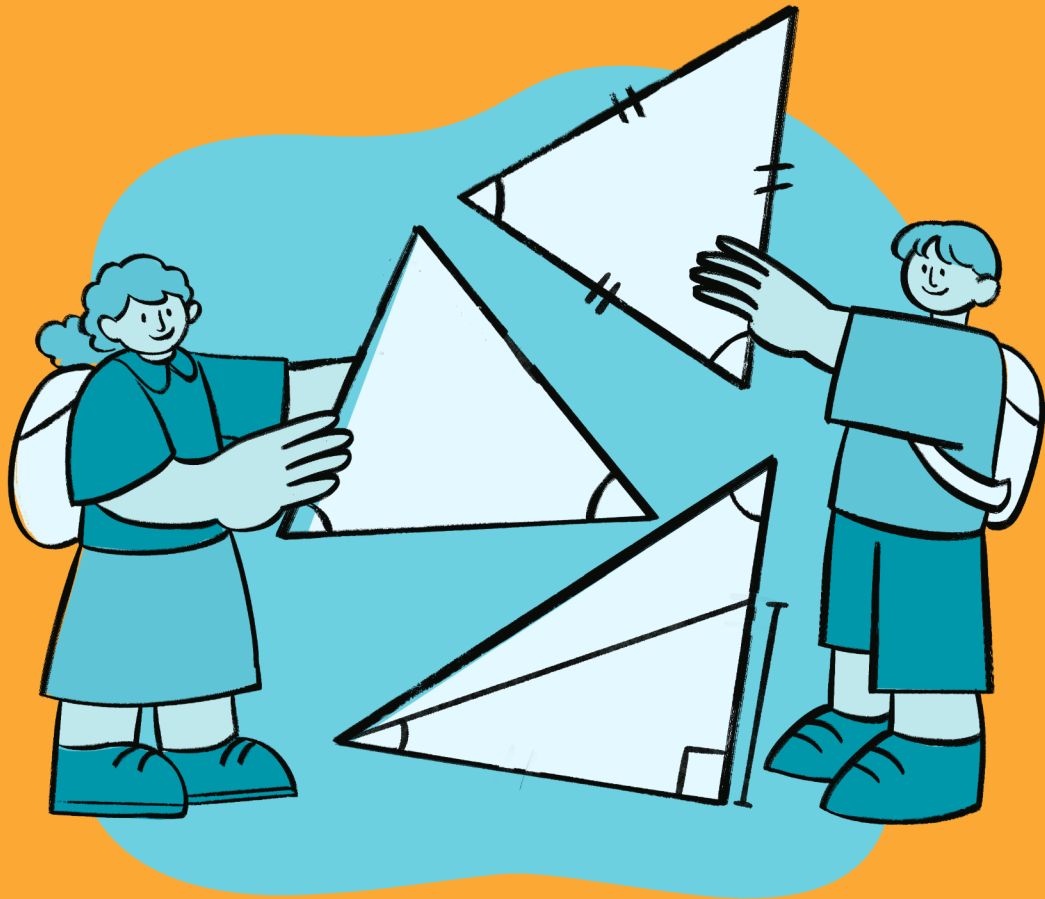
• Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 8 out. 2025.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações – Ensino Fundamental**. 7. ed. São Paulo: Ática, 2017.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1. 2.ed.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.



Capítulo 3:

Relações Geométricas nos Triângulos



TEMA

3

3.1.

Elementos e Pontos Notáveis nos Triângulos

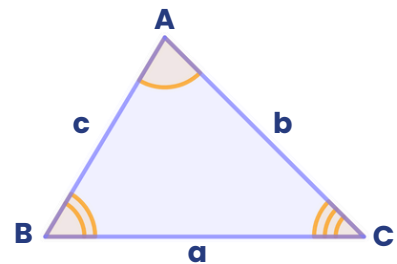
Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF08MA15

Todo **triângulo** é definido por seus três **vértices**, três **lados** e três **ângulos**. No entanto, a análise geométrica nos permite ir além e identificar elementos internos que possuem propriedades especiais.

Compreender esses conceitos (mediana, bissetriz, altura, mediatriz, baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro) é fundamental para o estudo avançado da geometria plana, pois eles formam a base para a construção de figuras, o cálculo de áreas e a demonstração de importantes teoremas.

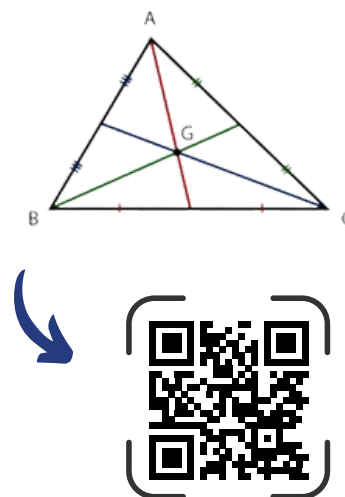
- Como os demais polígonos, cada triângulo possui seus **vértices**, **lados** e **ângulos**. Para representar, usamos a notação $\triangle ABC$. Sendo:
 - **A**, **B** e **C** os vértices;
 - $a(\overline{BC})$, $b(\overline{AC})$ e $c(\overline{AB})$, os lados;
 - e \widehat{CBA} , \widehat{BAC} , \widehat{ACB} , os ângulos.



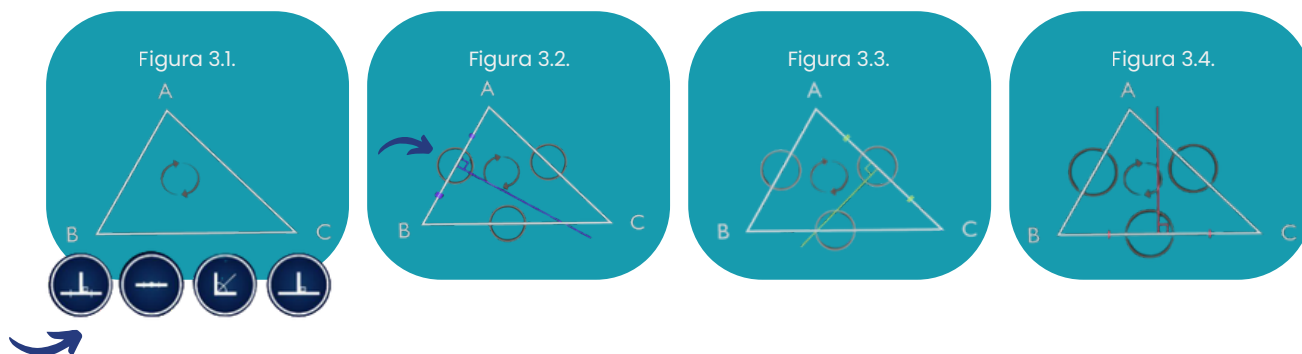
Importante notar que no **triângulo** chamamos de:

- **Lado oposto a um ângulo**, o lado formado pela união dos dois outros vértices;
- **Lado adjacente a dois ângulos**, aquele lado formado pela união entre esses dois vértices formadores do ângulo.
- Já no triângulo retângulo, chamamos os lados de **catetos** (quando são adjacentes ao ângulo reto) e **hipotenusa** (o lado oposto ao ângulo reto).
- Em todo triângulo, cada lado é maior que a diferença dos outros dois (ou cada lado é menor que a soma dos outros dois). E ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando os elementos e pontos notáveis nos triângulos em **Realidade Aumentada**.
- Nos triângulos, temos alguns elementos notáveis, são eles:

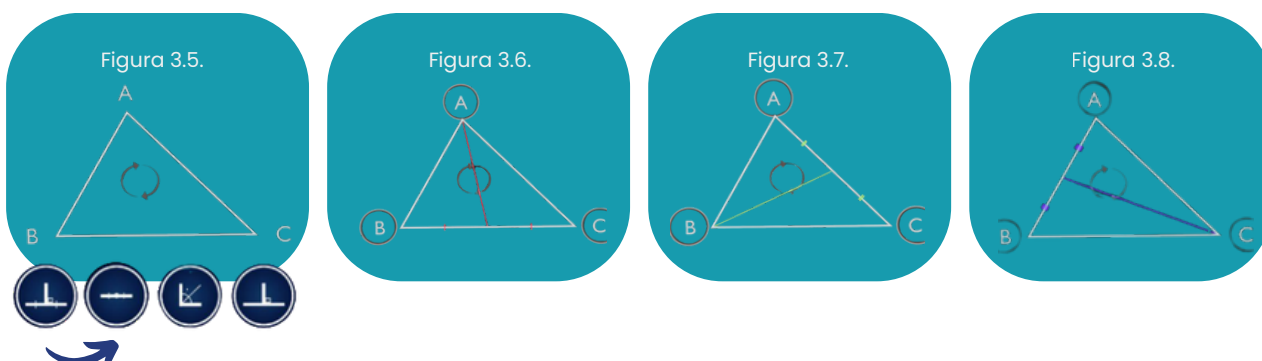


Mediatriz



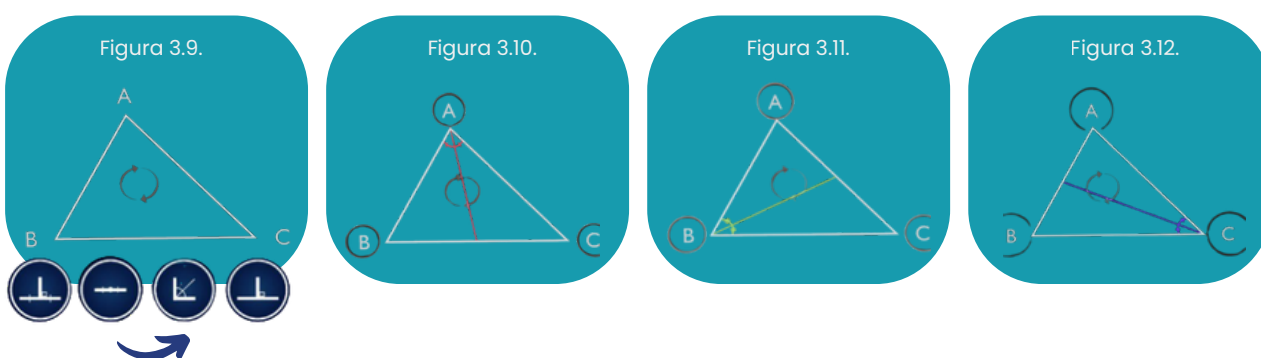
- É a reta perpendicular traçada a partir do ponto médio de um lado do triângulo.
- Ao clicar no **primeiro círculo** do rodapé da tela, Figura 3.1, e em seguida no círculo que aparece no lado \overline{AB} da Figura 3.2. Em **azul** surgirá a **Mediatriz** relativa ao lado AB. Veja nas Figuras 3.3 e 3.4 respectivamente as mediatrizes relativas aos lados \overline{AC} em **verde** e \overline{BC} (em **vermelho**).

Mediana



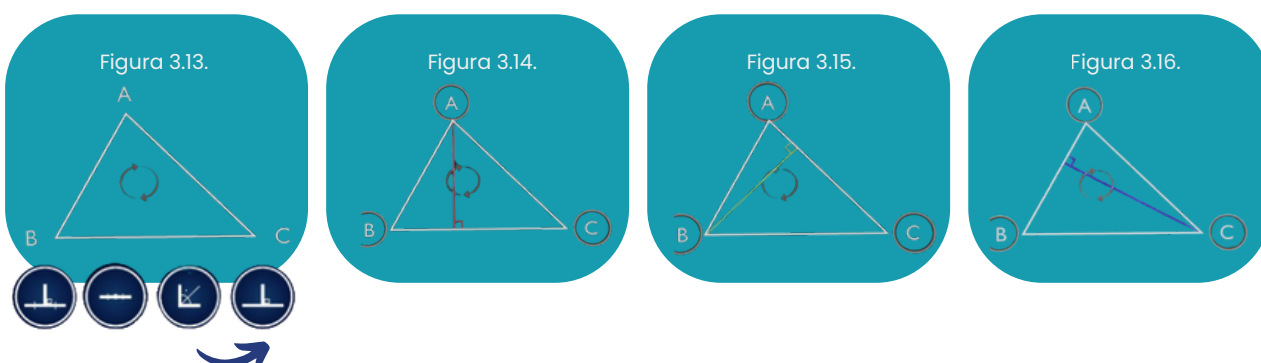
- Mediana é o segmento que une um vértice ao ponto médio (ponto que separa aquele lado em duas partes iguais) do lado oposto;
- Ao clicar no **segundo círculo** do rodapé da tela (Figura 3.5) e, em seguida, no círculo que aparece sobre o vértice **A** (Figura 3.6), surgirá em **vermelho**, a **Mediana** relativa ao vértice **A**. Veja nas Figuras 3.7 e 3.8 respectivamente as medianas relativas aos vértices **B** em **verde**, e **C** em **azul**.

Bissetriz



- É o segmento que une um vértice ao seu lado oposto dividindo seu ângulo em duas partes iguais;
- Ao clicar no **terceiro círculo** do rodapé da tela (Figura 3.9) e, em seguida, no círculo que aparece sobre o vértice **A**, surgirá, em **vermelho**, a bissetriz relativa a esse vértice (Figura 3.10). Veja nas Figuras 3.11 e 3.12 respectivamente as bissetrizes relativas aos vértices **B** em **verde**, e **C** em **azul**.

Altura



- Altura é o segmento traçado a partir de uma perpendicular, que une um vértice a reta de seu lado oposto;
- Ao clicar no **quarto círculo** do rodapé da tela (Figura 3.13) e, em seguida, no círculo que aparece sobre o vértice **A**, surgirá, em **vermelho**, a **altura** relativa ao lado **BC** (Figura 3.14).
- Veja nas Figuras 3.15 e 3.16 respectivamente as bissetrizes relativas aos vértices **B** em **verde**, e **C** em **azul**.
- Esses conceitos podem ser visualizados na Figura 3.17:

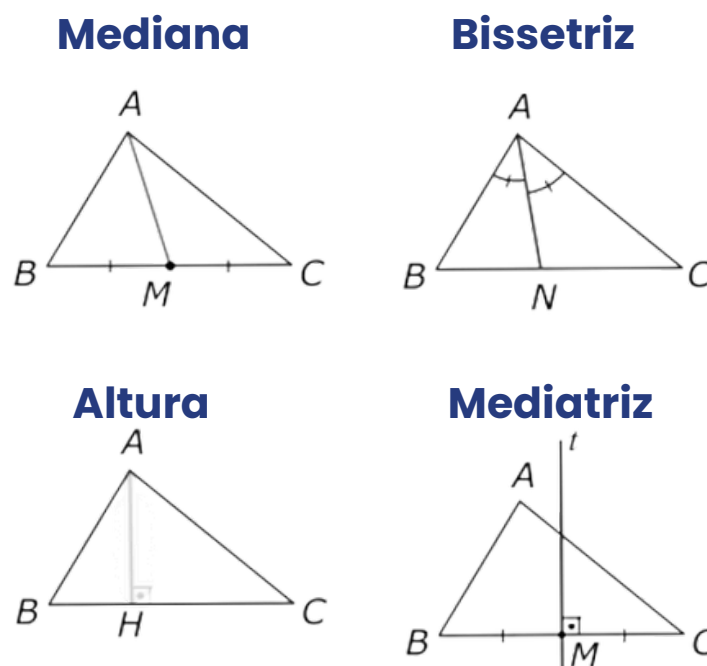


Figura 3.17.

Pontos Notáveis do Triângulo

- A partir dos elementos notáveis, formamos os pontos notáveis de um triângulo, que são:

Baricentro

- É o ponto de **interseção** das três medianas.
- Após clicar em cada um dos **vértices** do triângulo, aparecerão simultaneamente as 3 **medianas**. Observe o **baricentro** do triângulo indicado na Figura 3.18, por **G**. Ao clicar o **i**, a tela mostra o conceito de **baricentro**, veja na Figura 3.19:

Figura 3.18.

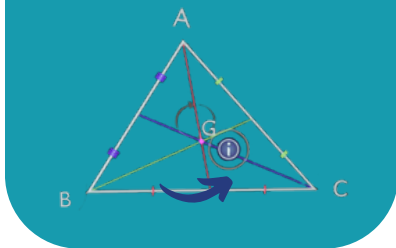


Figura 3.19.

Baricentro é o ponto de interseção das três medianas, este ponto divide cada mediana na relação 2:1, ou seja, a parte desse segmento que contém o vértice é o dobro da outra.

Incentro

- É a interseção das **bissetrizes** internas, tal ponto possui igual distância dos lados desse triângulo.
- Após clicar em cada um dos **vértices** do triângulo, aparecerão simultaneamente as 3 **bissetrizes**. Observe o **incentro** do triângulo indicado na Figura 3.20 por **S**.
- Ao clicar no **i**, a tela mostra o conceito de **incentro**, veja na Figura 3.21:

Figura 3.20.

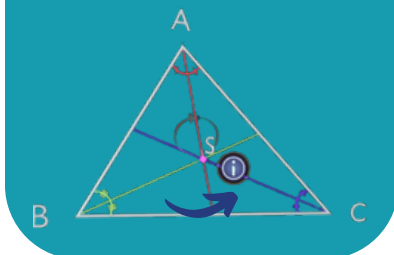


Figura 3.21.

Incentro é a interseção das bissetrizes internas, tal ponto possui igual distância dos lados desse triângulo.

Ortocentro

- O **encontro das alturas** de um triângulo forma o ortocentro. Após clicar em cada um dos lados do triângulo, aparecerão simultaneamente as 3 alturas, conforme a Figura 3.22.
- Observe o **ortocentro** do triângulo indicado na figura por **H** (Figura 3.23).

Figura 3.22.

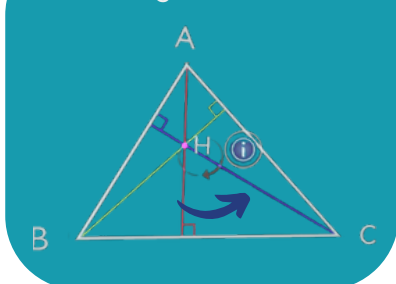
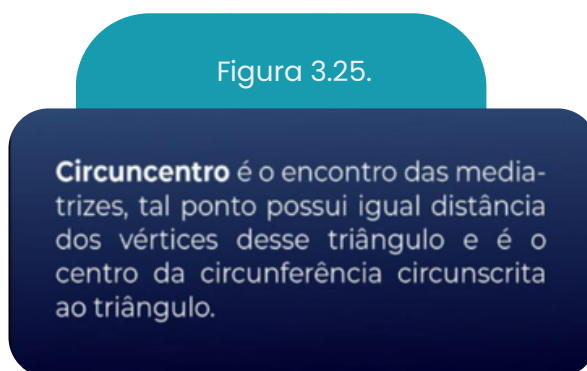
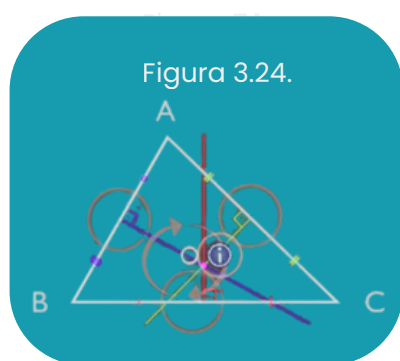


Figura 3.23.

Ortocentro é o encontro das alturas de um triângulo.

Circuncentro

- O **encontro das mediatrizes** forma o circuncentro, tal ponto possui igual distância dos vértices desse triângulo e é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
- Após clicar em cada um dos lados do triângulo, aparecerão simultaneamente as 3 mediatrizes, ilustrado na Figura 3.24.
- Observe o **circuncentro** do triângulo indicado na figura por **O**.
- Ao clicar no **i**, a tela da Figura 3.25 mostra a definição.

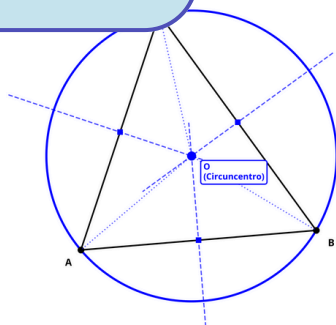


Circunferência Circunscrita

Centro: Circuncentro (O)
Encontro das Mediatrizes

Propriedades:

- O circuncentro é o encontro das 3 mediatrizes (perpendiculares aos lados)
- A circunferência circunscrita passa pelos 3 vértices do triângulo
- O circuncentro é equidistante dos 3 vértices
- Pode estar dentro, sobre ou fora do triângulo

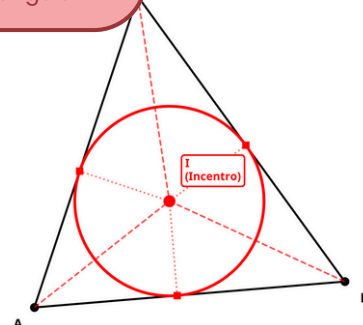


Circunferência Inscrita

Centro: Incentro (I)
Encontro das Bissetrizes

Propriedades:

- O incentro é o encontro das 3 bissetrizes
- A circunferência inscrita é tangente aos 3 lados do triângulo
- O raio é perpendicular aos lados nos pontos de tangência
- Pode estar dentro, sobre ou fora do triângulo



- A Figura 3.26 ilustra todos os principais pontos do triângulo.

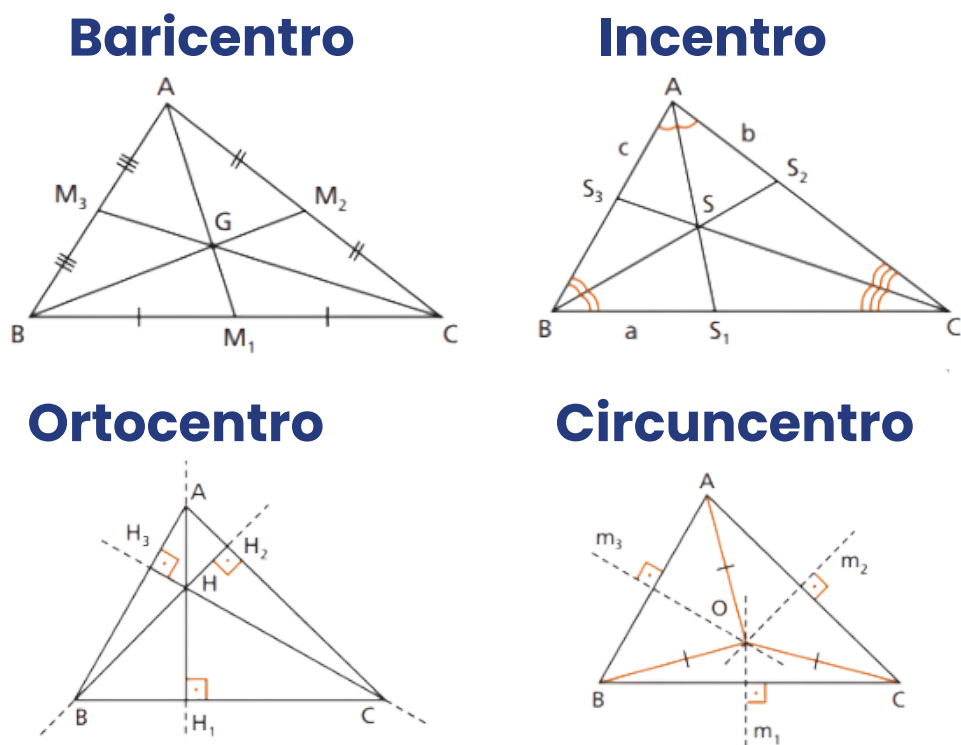


Figura 3.26.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Quiz Online

- Divida a turma em dois times e explore o quiz da plataforma.



• Referências:

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.
 PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.1. 2.ed.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

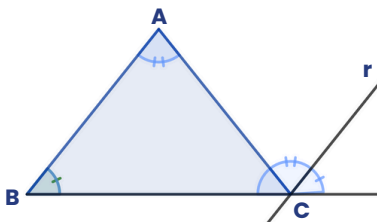
Ângulos no Triângulo

Por dentro da BNCC:

Habilidades:

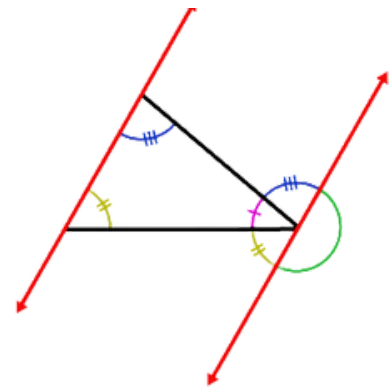
EF07MA24

- No triângulo, temos que a **soma de seus ângulos internos** é igual a **180°**, teorema provado ao se traçar uma reta paralela a um de seus lados e analisar os ângulos alternos e correspondentes envolvidos.
- Devido a esse teorema, temos que um **ângulo externo** tem medida **igual a soma dos ângulos internos não adjacentes** a ele. Portanto, o ângulo externo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

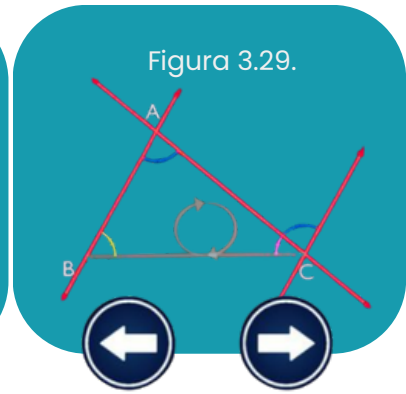
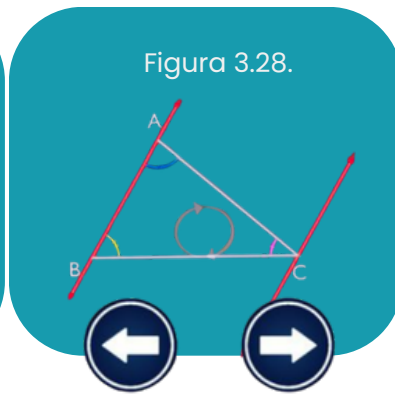
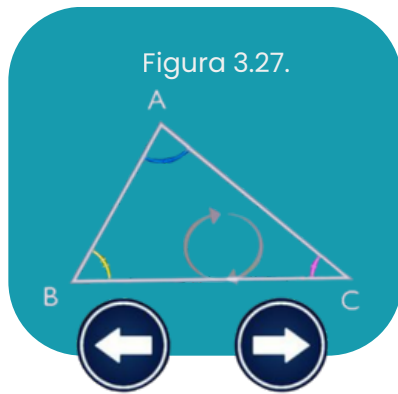


- reta $r \parallel AB$
- $m(\hat{ACD}) = m(\hat{BAC}) \rightarrow$ **ângulo alterno interno**
- $m(\hat{ECD}) = m(\hat{CBA}) \rightarrow$ **ângulo correspondente**
- Logo, $\hat{C} + \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$

- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando os elementos e pontos notáveis nos triângulos em **Realidade Aumentada**.

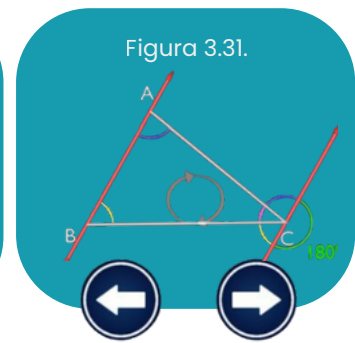
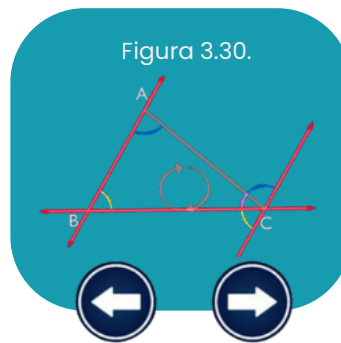


- A primeira tela que será mostrada, contém um triângulo de vértices **A**, **B** e **C** e seus três ângulos internos representados pelas cores: **azul**, **amarelo** e **rosa** respectivamente, como a figura 3.27 a seguir.



- As telas seguintes, surgem assim que clicamos na **seta** para a direita.
- Na Figura 3.28 ao lado, é traçada uma **reta paralela** ao cateto \overline{AB} do triângulo.
- Ao traçar a **transversal** às paralelas pelo lado \overline{AC} , o ângulo externo formado em **azul** é congruente ao ângulo \hat{A} , pois são alternos internos (Figura 3.29).

- Analogamente, ao traçarmos a **transversal** às paralelas pelo lado \overline{BC} , o ângulo externo formado em **amarelo** é congruente ao ângulo \hat{C} , pois são ângulos correspondentes, conforme Figuras 3.30 e 3.31.



Logo, a soma dos três ângulos (**amarelo**, **azul** e **rosa**) internos do triângulo somam 180° .

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



- Faça as perguntas abaixo para os alunos e faça-os refletirem a respeito do tema, em seguida aplique o **Quiz da** plataforma.
 - O que vocês observaram quando a reta paralela foi traçada?
 - Como a atividade ajudou a entender a relação entre os ângulos internos e externos?
 - Descrevam com suas palavras por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , baseando-se no que viram.
 - Pensem em como essa visualização em **Realidade Aumentada** pode ser útil para outros conceitos da geometria.

TEMA

3

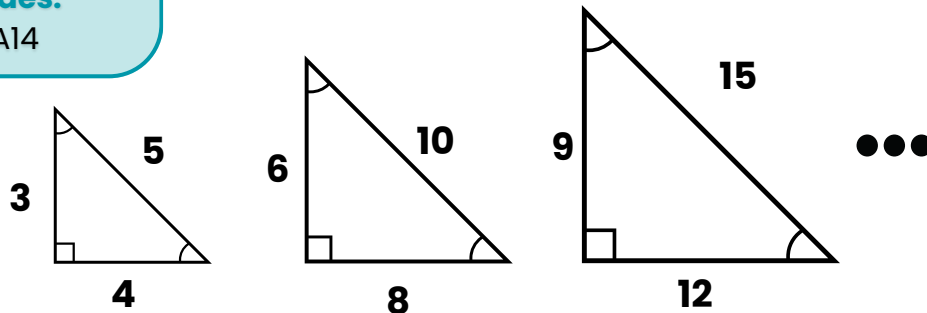
3.3.

Teorema de Pitágoras

Aos triângulos retângulos que possuem seus lados medindo números inteiros, damos o nome de **triângulos pitagóricos**. Os mais conhecidos são os triângulos com lados proporcionais aos números 3, 4 e 5.

Por dentro da BNCC:

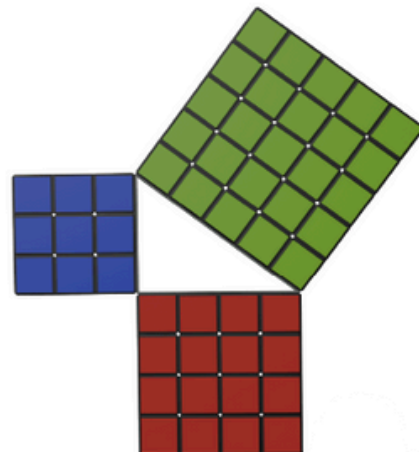
Habilidades:
EF09MA14

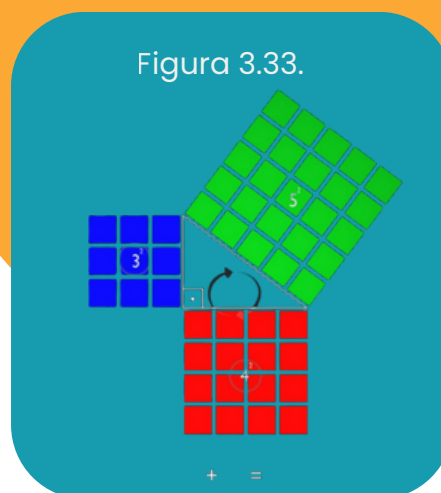
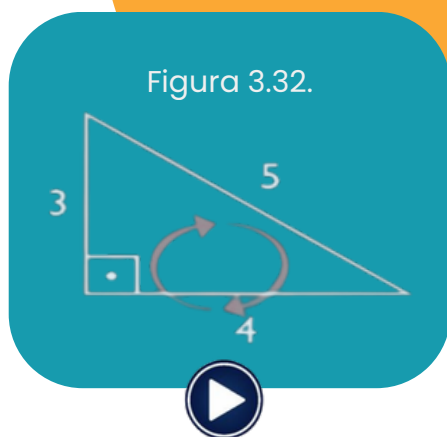


- O **Teorema de Pitágoras** é uma relação entre as medidas dos lados de um **triângulo retângulo**. De acordo com esse teorema, para calcular o quadrado da medida da hipotenusa, basta somar os quadrados das medidas dos catetos. Sendo assim, se os catetos medem **b** e **c** e a hipotenusa mede **a**, então:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, daremos as instruções para acompanhar a demonstração do **Teorema de Pitágoras** em **Realidade Aumentada**.
- Ao escanear, a tela a seguir será mostrada:



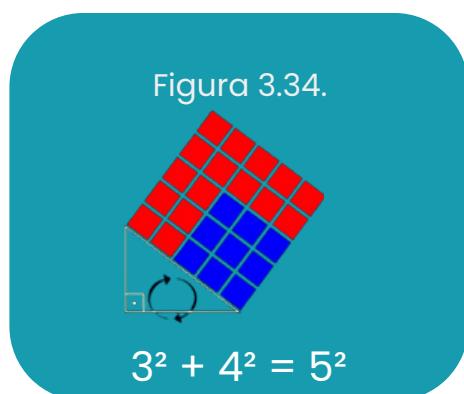


- Na Figura 3.32, há um triângulo que possui **hipotenusa** de medida **5** e **catetos** medindo **3** e **4**. Ao clicar no botão de **PLAY**, a tela seguinte é mostrada.
- Observe que para cada um dos lados do triângulo, a quantidade de quadradinhos sugerida tem por base a medida do lado. A partir desta medida, formou-se um quadrado (Figura 3.33).

Cálculo das Áreas: Cada um dos quadrados formados tem uma área que é o lado ao quadrado (L^2).

- O quadrado **azul**, apoiado no cateto menor, tem lado 3 e, portanto, uma área de $3^2 = 9$ unidades.
- O quadrado **vermelho**, apoiado no cateto maior, tem lado 4 e, portanto, uma área de $4^2 = 16$ unidades.
- O quadrado **verde**, apoiado na hipotenusa, tem lado 5 e, portanto, uma área de $5^2 = 25$ unidades.

O **Teorema de Pitágoras** enuncia que a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual à área do quadrado da hipotenusa. Ao clicarmos sobre cada um dos quadrados, o número correspondente ao lado preenche a equação abaixo da imagem.



- A Figura 3.34 ao lado mostra que, somando a área do **quadrado azul** com a do **polígono vermelho**, temos $9 + 16 = 25$.
- Conclui-se que essa soma 25 é exatamente a área do **quadrado verde** (da hipotenusa).

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Encontrando Novos Triângulos Pitagóricos

Passo a Passo:

1. Formação dos Grupos e Apresentação do Desafio

- Divida a turma em pequenos grupos.
- Apresente o desafio: "A missão de vocês é encontrar outros conjuntos de três números inteiros que possam formar um triângulo pitagórico. Usem a fórmula do Teorema de Pitágoras para verificar."
- Sugira algumas estratégias para começar, como:
 - "Podemos tentar multiplicar os lados do triângulo 3, 4, 5 por um número inteiro (ex. 2, 3, etc.). O que acontece se multiplicarmos por 2?" (Levará a 6, 8, 10).
 - "E se escolhermos um cateto e tentarmos encontrar os outros dois?"

- (Ex: Se um cateto for 5, qual seria o outro para que a hipotenusa também fosse um número inteiro?).
- Instrua os grupos a registrarem suas tentativas e os conjuntos que encontrarem que satisfazem o teorema.

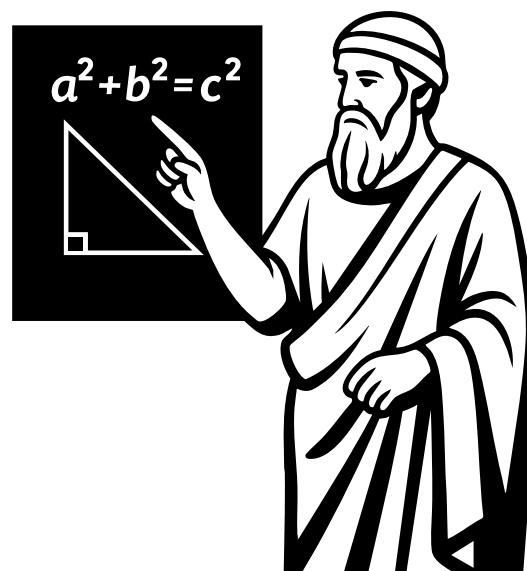
2. Compartilhando Descobertas

- Cada grupo deve apresentar um ou mais exemplos de triângulos pitagóricos que descobriram, mostrando os cálculos que confirmam a relação $a^2 = b^2 + c^2$.
- Discutam as estratégias utilizadas por cada grupo para encontrar os exemplos.

3. Reflexão e Sistematização:

- Peça aos alunos para refletirem sobre a importância do Teorema de Pitágoras na matemática e em situações do cotidiano (ex: construção, arquitetura).

- Sistematize os exemplos descobertos na lousa, criando uma lista de triângulos pitagóricos.
- **Avaliação:**
 - Participação ativa dos alunos nas discussões e na resolução do desafio.
 - Registro correto dos cálculos e dos triângulos pitagóricos encontrados pelos grupos.
 - Compreensão da aplicação do Teorema de Pitágoras para encontrar novos exemplos.



- **Referências:**

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**.9.ed São Paulo: Atual, 2013.

PESCO,D.U; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica**. v.1. 2.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

RIZZO, Maria Luiza Alves. "**Teorema de Pitágoras**"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/teorema-pitagoras.htm>. Acesso em 19 de dezembro de 2025.

TEMA

4

4.1.

Prismas

Por dentro da BNCC:

Habilidades:

EF06MA17

EF06 MA18

Os prismas são poliedros convexos que tem duas **faces paralelas** e **congruentes** chamadas **bases** e as demais faces em forma de paralelogramos chamadas **faces laterais**. Segue a Figura 4.1. de um prisma reto de base hexagonal:

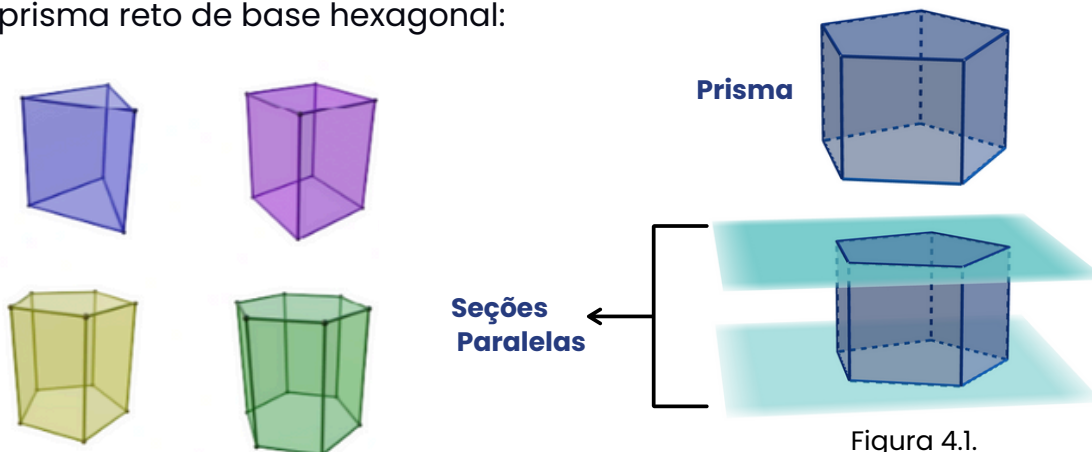


Figura 4.1.



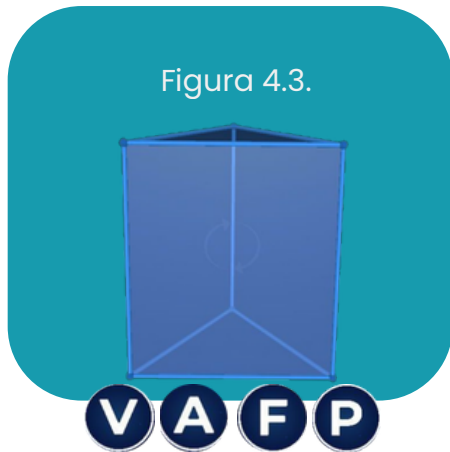
- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando os prismas em **Realidade Aumentada**.

Elementos do Prisma

- Os elementos do **prisma** são:
 - **2n vértices** (pontos que formam os polígonos);
 - **2 bases** (polígonos formadores do sólido);
 - **3n arestas** (segmentos que unem os vértices);
 - **n arestas laterais** (segmentos que unem os vértices, um de cada base);
 - **n faces laterais** (quadriláteros formados pela união de 2 vértices correspondentes de cada polígono do prisma).
- Para visualizar os vértices do prisma, após escanear, clicamos em um dos **polígonos** que aparecem na tela e reproduzimos a Figura 4.2.

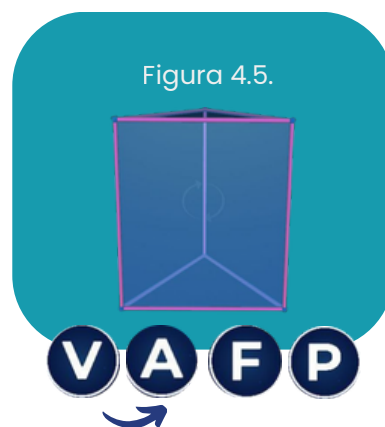
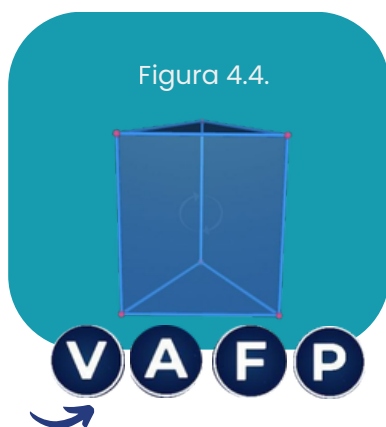


- Ao clicar em um dos polígonos, ele se transforma em um prisma reto a partir de sua base (Figura 4.3). No exemplo clicamos no triângulo.
- Abaixo do prisma estão indicados por círculos os elementos:




- V** → **Vértices**
- A** → **Arestas**
- F** → **Faces**
- P** → **Planificação**

- Clicando em **V**, a figura destaca os **vértices** com **pontos vermelhos** piscando como mostra a Figura 4.4 abaixo.
- Clicando em **A**, é destacado as **arestas** do prisma. Veja na Figura 4.5:

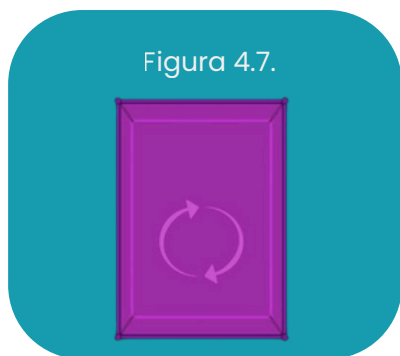



- Ao clicar em **P**, a Figura 4.6 mostra a **planificação** da figura.

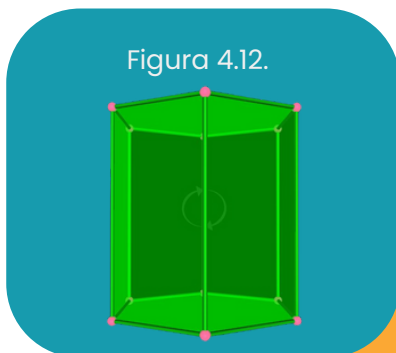
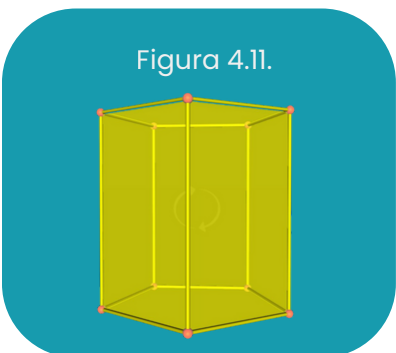
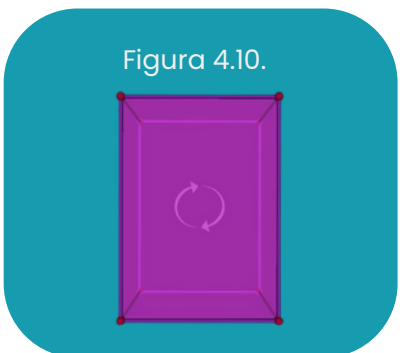



- Se clicarmos no ícone , que fica na tela inicial, é possível ver o prisma selecionado fixo em cima de uma mesa ou no chão. Podemos nos movimentar ao seu redor e observar todos os elementos em **Realidade Aumentada**.

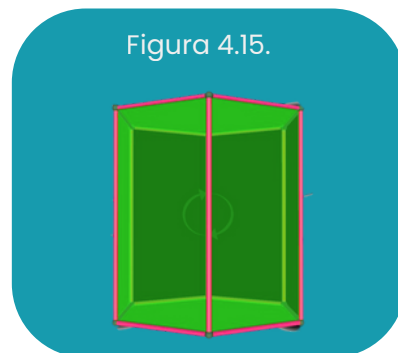
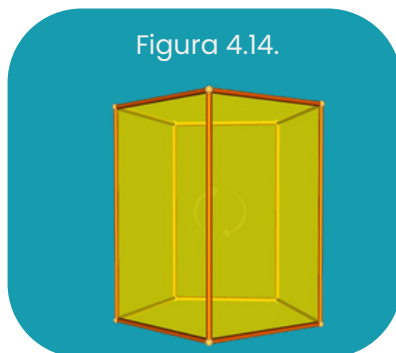
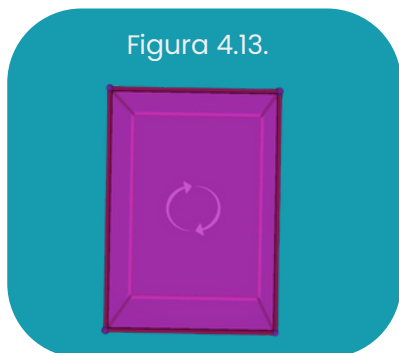
- Ao retornarmos à tela inicial, pela seta lateral, observamos, além do triângulo visualizado anteriormente, um **quadrado**, um **pentágono** e um **hexágono**. As Figuras 4.7, 4.8 e 4.9 a seguir apresentam os três prismas formados pelos polígonos mencionados:



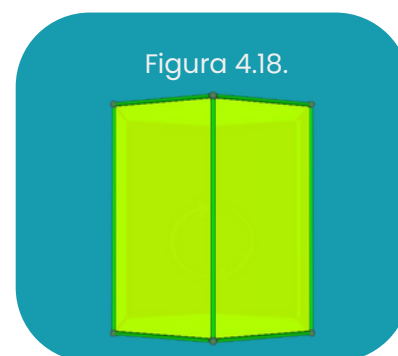
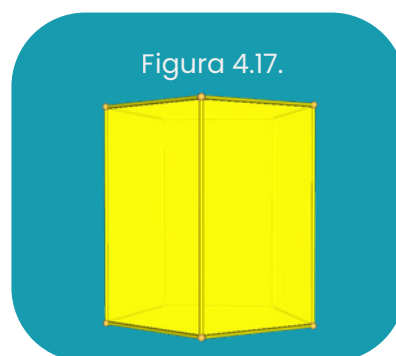
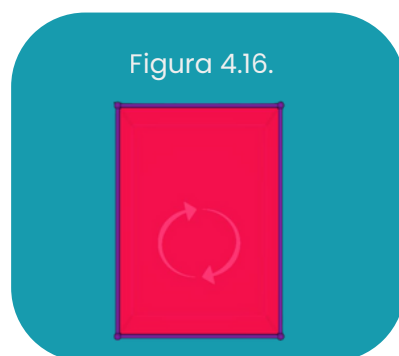
- Clicando em , podemos observar os vértices dos respectivos prismas como nas figuras. Veja nas Figuras 4.10, 4.11 e 4.12:



- O ícone Arestas  apresenta as Figuras 4.13, 4.14 e 4.15:





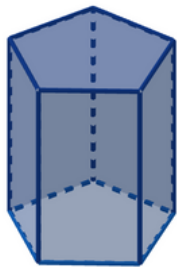
- Podemos visualizar as faces clicando em Faces **F**, as Figuras abaixo (4.16, 4.17 e 4.18) são apresentadas:



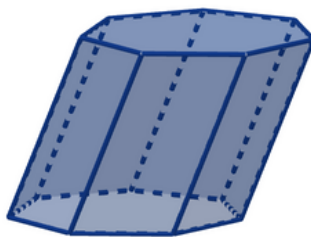
- A planificação pode ser visualizada ao clicarmos no ícone **P**, as Figuras 4.19, 4.20 e 4.21. representam essas formas.



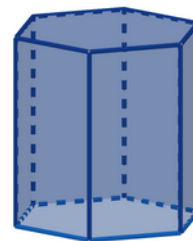
- Se clicarmos no ícone  para retornarmos a tela inicial, e em seguida clicarmos em , podemos ver o prisma selecionado fixo em cima de uma superfície qualquer, como uma mesa ou o chão.
- Podemos nos movimentar ao seu redor e observar todos os elementos em **Realidade Aumentada**.
- O **prisma** é chamado de **reto** quando suas arestas laterais são perpendiculares aos planos da base e **oblíquo** quando não o são.
- Além disso, pode ser classificado como **regular** se as bases são polígonos regulares.
- O **paralelepípedo** é um prisma especial, cujas bases são paralelogramos.
- Já o **cubo** é um prisma reto cujas bases são quadrados e suas arestas são todas congruentes.



Prisma Reto
Pentagonal



Prisma Oblíquo
Heptagonal



Prisma Regular
Hexagonal

- Quanto às suas **dimensões**, temos que:
 - **Altura** do prisma é a distância entre os planos da base;
 - **Área lateral** de um prisma é a soma das áreas das faces laterais;
 - **Área total** do prisma é a soma da área lateral com as áreas das bases;
 - Quando o prisma é **reto**, a área lateral é o produto do perímetro da base pela altura.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Explorando Prismas

- **Objetivo:**
 - Compreender as características dos prismas.
 - Identificar e classificar prismas a partir da visualização em **realidade aumentada**.

- **Materiais:**
 - Celulares ou tablets;
 - **Códigos QR** com modelos de prismas;
 - Fichas de anotações para cada aluno/grupo.
- **Passo a Passo:**
- 1. Introdução:*
 - O professor explica o conceito de prismas e suas características básicas, e mostra exemplos físicos ou desenhados no quadro.
 - 2. Exploração com Realidade Aumentada*
 - Os alunos utilizam os dispositivos para escanear os códigos QR que revelam diferentes prismas em 3D.
 - Eles podem girar e explorar os modelos para identificar seus elementos.



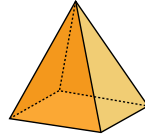
- 3. Análise e Classificação*
 - Em duplas ou trios, os alunos anotam em fichas:
 - Nome do prisma;
 - Quantidade de faces, arestas e vértices;
 - Formato da base.
 - O professor circula para auxiliar e questionar os alunos sobre as observações.
 - 4. Discussão e Conclusão*
 - Cada grupo compartilha suas descobertas.
- **Extensão:** ★
 - Pedir que os alunos desenhem os prismas observados e comparem com as projeções da plataforma.
 - Criar um desafio em que os alunos identifiquem prismas no ambiente da escola e os relacionam com os modelos vistos.

- **Referências:**

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica.** São Paulo: Atual, 2013.
PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica. v.2. 3.ed.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2007.

Pirâmides

Definição:



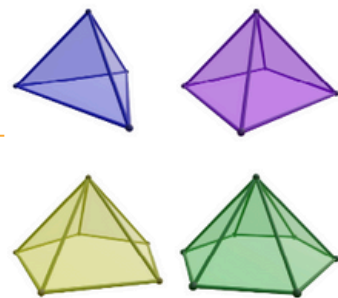
Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF09MA17

As **pirâmides** são **poliedros** em que a base é uma região poligonal e as faces laterais são regiões **triangulares**, conforme podemos verificar nas figuras seguintes:



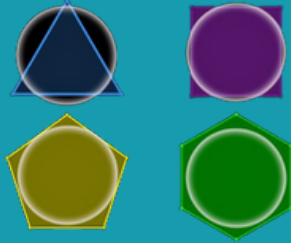
- Sendo **n** o **número de lados do polígono que forma a base**, os elementos da **pirâmide** são:
 - **n+1 vértices** (pontos que formam os polígonos e o vértice da pirâmide);
 - **base** (polígono formador do sólido);
 - **2n arestas** (segmentos que unem os vértices);
 - **n arestas laterais** (segmentos que unem os vértices, um de cada base);
 - **n faces laterais** (triângulos formados pela união de 2 vértices do polígono com o vértice da pirâmide).



- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando os elementos e pontos notáveis nos triângulos em **Realidade Aumentada**.



Figura 4.22.



- Na tela inicial aparecerão quatro polígonos que serão as bases da pirâmide, veja a Figura 4.22 ao lado.
- Clicando em um dos polígonos abrirá a tela da Figura 4.23.
- Em qualquer uma das pirâmides, ao clicar no ícone **1**, aparecerão os elementos:

Figura 4.23.



V → **Vértices**

A → **Arestas**

F → **Faces**

P → **Planificação**

- Em cada tela, quando os respectivos ícones são clicados, os elementos correspondentes destacam-se, piscando em **vermelho**. Acompanhe abaixo, cada um desses elementos nas pirâmides.

V : Nas Figuras 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27, estão em destaque os vértices.

Figura 4.24.



Figura 4.25.

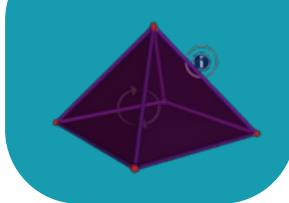


Figura 4.26.



Figura 4.27.



F : Nas Figuras 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31, estão em destaque as faces.

Figura 4.28.



Figura 4.29.

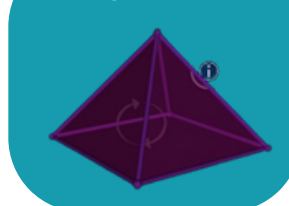
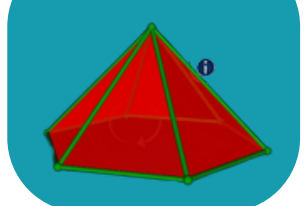


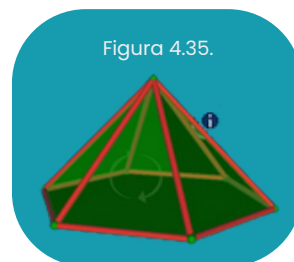
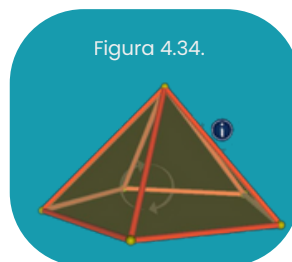
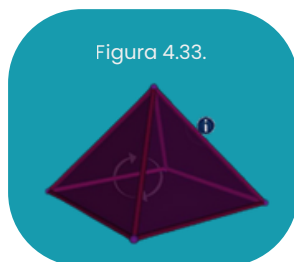
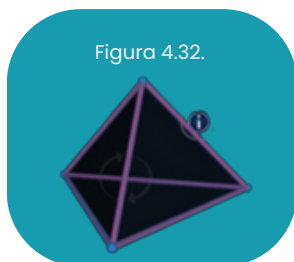
Figura 4.30.



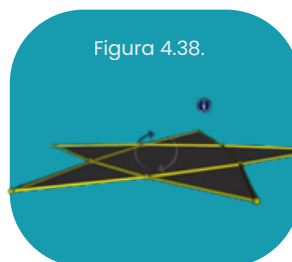
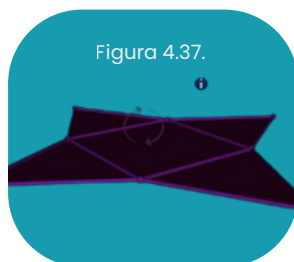
Figura 4.31.



A : Nas Figuras 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35, estão em destaque as arestas.



P : Nas Figuras 4.36, 4.37, 4.38 e 4.39, estão em destaque as planificações.



- A **pirâmide** é chamada **triangular** (ou **tetraedro**) se sua base possui **3** lados, **quadrangular** se a base possui **4** lados, e assim por diante.
- Além disso, pode ser classificada como **regular** se a base é um polígono regular e se o pé da perpendicular baixada do vértice ao plano da base coincide com o centro da base, ou seja, se a sua altura for a medida do segmento que une o vértice da pirâmide ao centro da base.

Quanto às **dimensões** da pirâmide, temos:

Altura

É a distância entre o vértice e o plano da base;

Apótema

É a altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral;

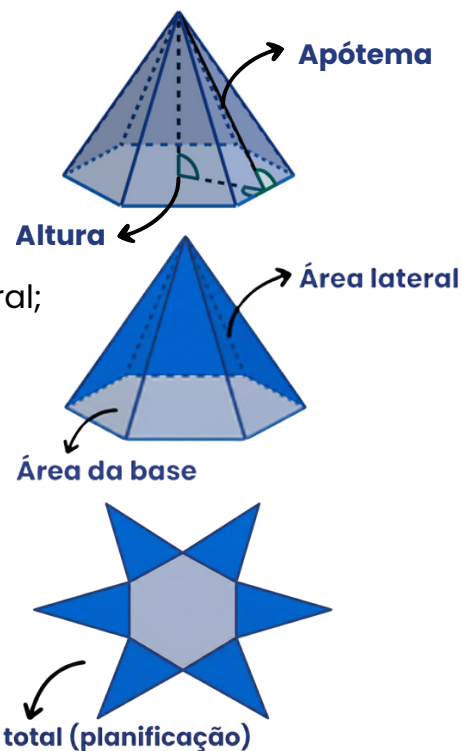
Área Lateral

É a soma das áreas das faces laterais;

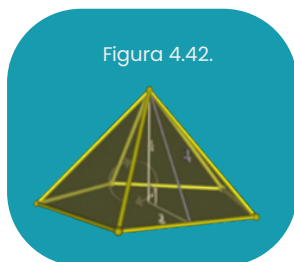
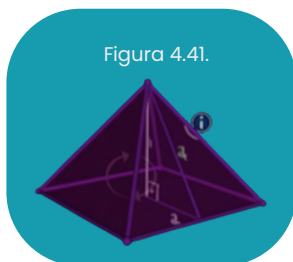
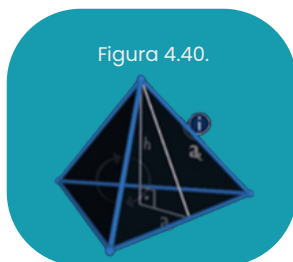
Área Total

É a soma da área lateral com a área da base.

- Quando a pirâmide é regular, a área lateral é a metade do apótema pelo perímetro da base.

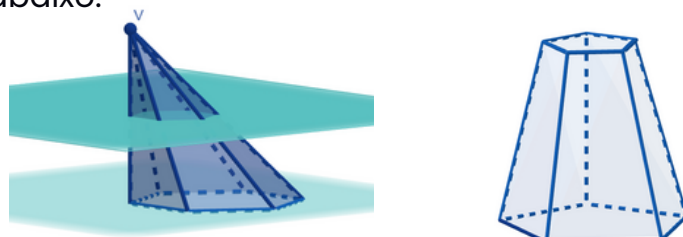


- Ao clicar em **2** e em seguida em **A**, uma animação demonstrará a construção dos **apótemas** e da **altura** de cada pirâmide. Veja nas Figuras 4.40, 4.41, 4.42 e 4.43.



Quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base, separamos essa pirâmide em 2 sólidos:

- **Uma nova pirâmide** (sólido que contém o vértice da pirâmide);
 - **Um tronco de pirâmide** (sólido que contém a base da pirâmide).
- Nesse tronco de pirâmide, as faces contidas nos planos paralelos são chamadas de **bases** e as demais são as **faces laterais** (que são trapézios). Acompanhe abaixo:



Um **tronco de pirâmide regular** é o tronco obtido a partir de uma pirâmide regular. Nessas, as faces laterais são **trapézios isósceles congruentes** e as alturas desses trapézios são chamadas de **apótemas do tronco de pirâmide**.

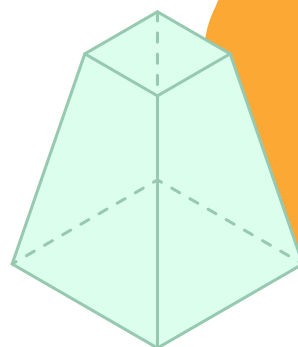
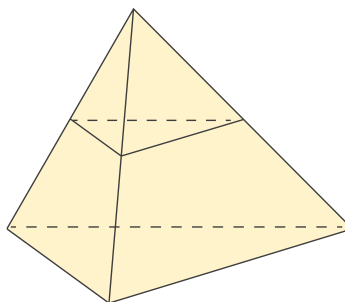
Já a **área lateral do tronco** é calculada pelo produto do apótema pela média aritmética dos perímetros das bases.

Área Lateral do Tronco

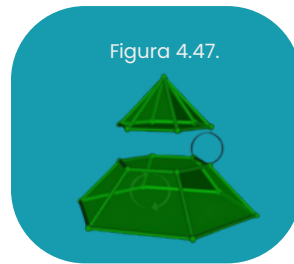
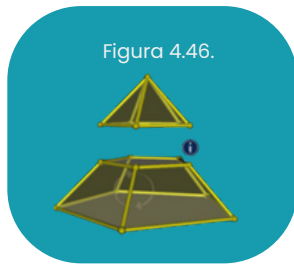
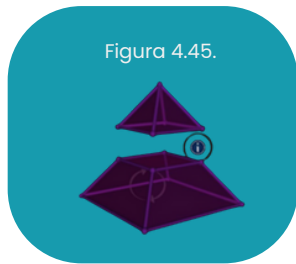
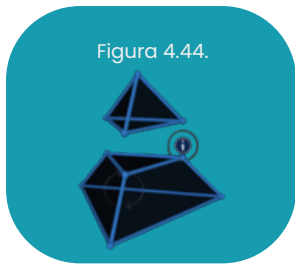
$$A_L = a \left(\frac{p + p'}{2} \right)$$

*a é o apótema do tronco de pirâmide regular

$\left\{ \begin{array}{l} p : \text{perímetro da base maior (base inferior)} \\ p' : \text{perímetro da base menor (base superior)} \end{array} \right.$



- Voltando à tela inicial e clicando em **2** e em **T**, você verá a animação ilustrada a seguir nas Figuras 4.44, 4.45, 4.46 e 4.47:



TEMA

4

4.3.

Relação do Volume de Prismas e Pirâmides

Por dentro da BNCC:

Habilidades:

- EF08MA21
- EM13MAT201
- EM13MAT309

Para ajudar na compreensão e fixação nos estudos da **relação do volume de prismas e pirâmides**, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o QR Code indicado, logo abaixo.

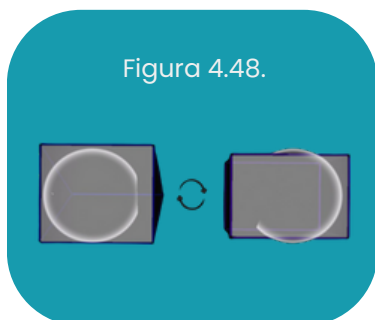
- O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela medida da altura.
- Sabendo que o volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura, **o volume da pirâmide nada mais é do que um terço do volume do prisma.**

Volume da Pirâmide

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$



- Na tela inicial, são mostrados dois prismas. O primeiro de base triangular e o segundo de base quadrangular (Figura 4.48).
- Ao clicarmos sobre um deles, a tela nos mostrará um prisma derramando seu conteúdo em 3 pirâmides de mesma base e altura. Veja a Figura 4.49:



Sugestões de Atividades em Sala de Aula



Atividade 1: Monte Sua Pirâmide

- **Objetivo:**
 - Compreender a planificação e construção de pirâmides.
- **Passo a Passo:**
 - Após explorar a pirâmide em RA, entregue planificações em papel (correspondentes aos modelos vistos).
 - Os alunos devem recortar, dobrar e montar a pirâmide.
 - Em seguida, apontar quais partes da planificação correspondem aos elementos que viram no modelo 3D.
- **Dica Extra:** ★
 - Use a plataforma durante a montagem para comparar com o modelo em realidade aumentada.

Atividade 2: Desafio da Planificação Correta

- **Objetivo:**
 - Reconhecer a planificação correta de uma pirâmide.
- **Passo a Passo:**
 - Mostre diferentes planificações no quadro (algumas incorretas).
 - Cada grupo escaneia o card com as pirâmides 3D e tenta identificar qual planificação corresponde corretamente ao modelo.
 - Justificam oralmente ou por escrito.
- **Versão gamificada:**
 - Uma pontuação adicional será atribuída aos participantes que responderem corretamente em menor tempo e apresentarem justificativas bem fundamentadas.

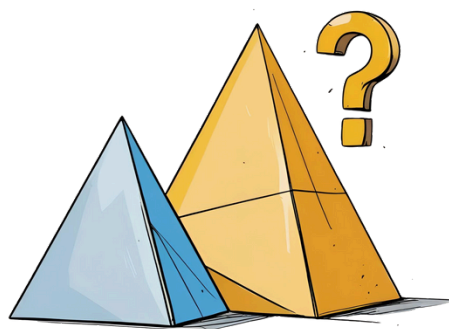
Atividade 3: Jogo “Quem Sou Eu?” com Pirâmides

- **Objetivo:**

- Fixar vocabulário e propriedades das pirâmides.

- **Passo a Passo:**

- Um aluno segura uma figura de pirâmide na testa (sem ver), os colegas dão dicas com base no que veem com o app.
- Exemplo de dica: “Você tem 5 faces” / “Sua base é um quadrado” / “Você tem 8 arestas”.



- **Referências:**

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica**. São Paulo: Atual, 2013.

GIOVANNI, J.R.; BONJORNIO, J.R. **2o Grau Matemática**. São Paulo: FTD 1990.

PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica**. v.2. 3.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2007.



Capítulo 5: Sólidos de Revolução



TEMA

5

5.1.

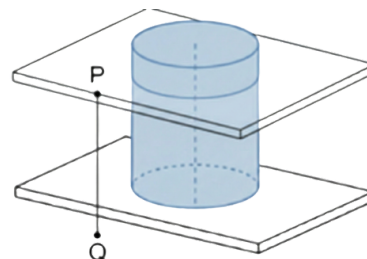
Cilindros

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EM13MAT504

O **cilindro** é o sólido geométrico formado pela união de todos os pontos situados entre dois círculos congruentes localizados em planos paralelos.

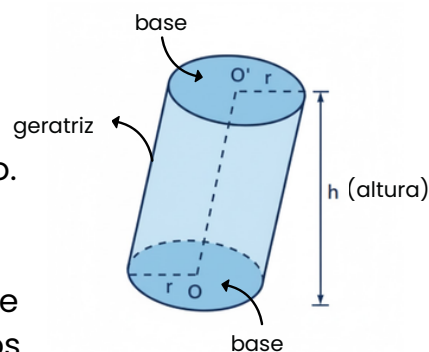
De outra forma, é a reunião da parte do **cilindro circular ilimitado** (reunião das retas paralelas a **PQ** e que passam pelos pontos de um círculo), compreendida entre as **seções circulares** formadas por **dois planos paralelos e distintos**.



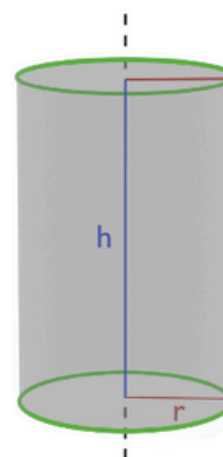
Elementos do Cilindro

Os **elementos** do cilindro são:

- **Altura** é a distância entre as bases.
- **Geratriz** é o elemento móvel que, ao seguir uma trajetória definida, cria a "casca" (a superfície lateral) de um sólido de revolução.
- **2 bases**, ou seja, círculos congruentes situados em planos paralelos;
- Além disso, temos o **eixo de um cilindro**, que é composto por uma reta determinada pelos centros das bases.



- O **cilindro** é **oblíquo** se as geratrizes são **oblíquas** aos planos das bases, e **reto** se as geratrizes são **perpendiculares** aos planos da base.
- O **cilindro reto** também é chamado **cilindro de revolução**, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.
- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando os cilindros em **Realidade Aumentada**.



- Assim que você escanear o código, a tela a seguir será mostrada no seu dispositivo (Figura 5.1).
- Ao clicar e arrastar a barra para a direita, podemos ver o **cilindro** se formando a partir do eixo de simetria e do retângulo (figura 5.2).
- Ao final da barra, o cilindro se **planifica**, demonstrando que a **área** pode ser calculada pela **soma da área do retângulo e de dois círculos** (Figura 5.3).



- Quanto às suas dimensões, temos que:
- A **altura** do cilindro é a distância entre os planos da base;
- A **área lateral** de um cilindro é a reunião das geratrizes, e é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e h (altura do cilindro). Assim, para calcular a medida da área lateral, usamos a fórmula:

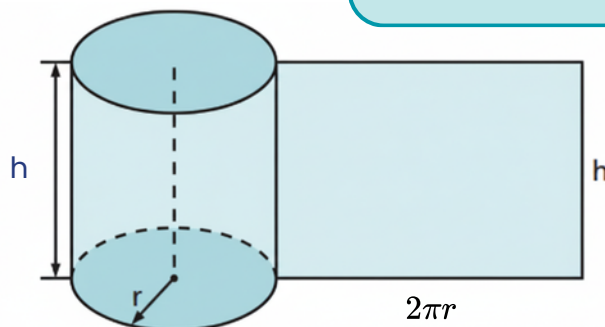
$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

- A **área total** do cilindro é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja:

$$A_T = A_L + 2 \cdot B$$

Em que B é a área do círculo dada por $2\pi r$, sendo assim, a área total pode ser descrita como:

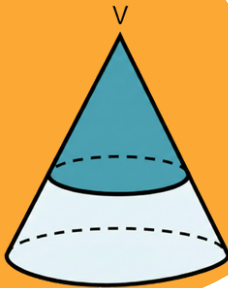
$$A_T = 2\pi r \cdot (h + r)$$



Cones

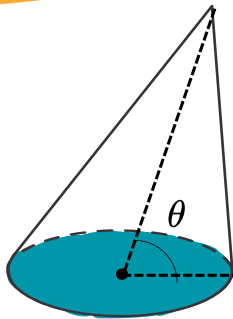
Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EM13MAT504



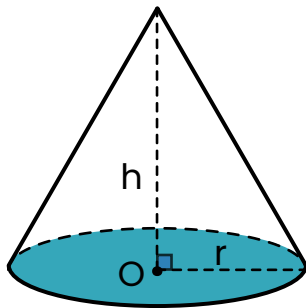
O **cone** é a reunião de segmentos de reta que têm uma extremidade em V e a outra nos pontos de um círculo, sendo V um ponto situado fora do plano que contém o círculo, denominado vértice do cone.

De outra forma, é a parte do cone ilimitado (reunião das semirretas de origem em V e que passam pelos pontos de um círculo) que contém o vértice quando se divide este cone pelo plano de uma seção circular, reunida com esta seção.

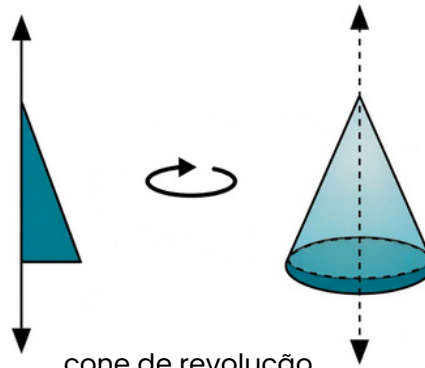


cone oblíquo

- O cone é **oblíquo** se o eixo é oblíquo ao plano da base e **reto** se o eixo é perpendicular ao plano da base.
- O cone **reto** também é chamado **cone de revolução**, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.



cone reto



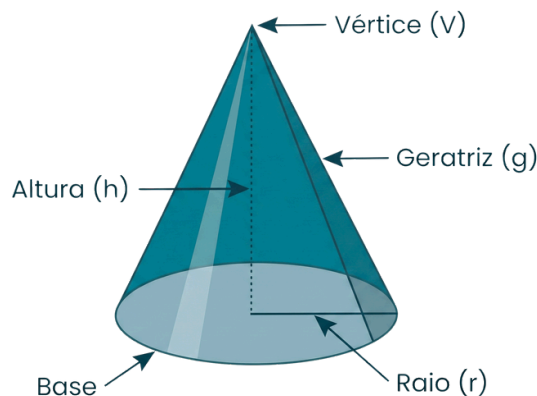
cone de revolução

Elementos do Cone

Os principais elementos que compõem um cone são:

- **Base:** é a região plana circular que serve de "apoio" para o cone.
- **Raio da Base (r):** corresponde ao raio da circunferência que forma a base do cone.
- **Vértice (V):** é o ponto mais distante da base, onde todos os segmentos de reta que formam a superfície lateral do cone se encontram.

- **Altura (h)**: é a distância perpendicular entre o vértice e o plano da base. O segmento de reta que representa a altura liga o vértice ao centro da base.
- **Geratriz (g)**: é qualquer segmento de reta que une o vértice a um ponto na circunferência da base.
- **Eixo de Rotação**: é o segmento de reta que passa pelo vértice e pelo centro da base, em torno do qual o triângulo retângulo gira para formar o cone.

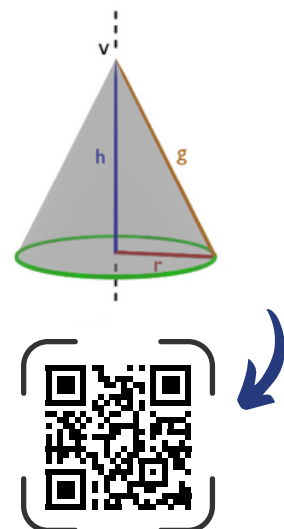


No cone reto, a **altura (h)**, o **raio da base (r)** e a **geratriz (g)** formam um triângulo retângulo. Portanto, eles se relacionam através do **Teorema de Pitágoras**, expresso pela seguinte fórmula:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Essa relação é fundamental para o cálculo de áreas e volumes de cones.

- Para ajudar na compreensão e fixação desse objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando os cones em **Realidade Aumentada**.



- Assim que você escanear o código, a tela a seguir será mostrada no seu dispositivo (Figura 5.4).
- Ao clicar e arrastar a barra para a direita, observamos a formação do **cone** pela rotação do triângulo retângulo em torno do eixo de simetria, conforme ilustrado na Figura 5.5.
- Ao final da barra, o cone se **planifica** (Figura 5.6), com as **geratrizes** destacadas em **vermelho** e o **comprimento do círculo da base** destacado em **verde**.



Quanto às **dimensões do cone**, temos que:

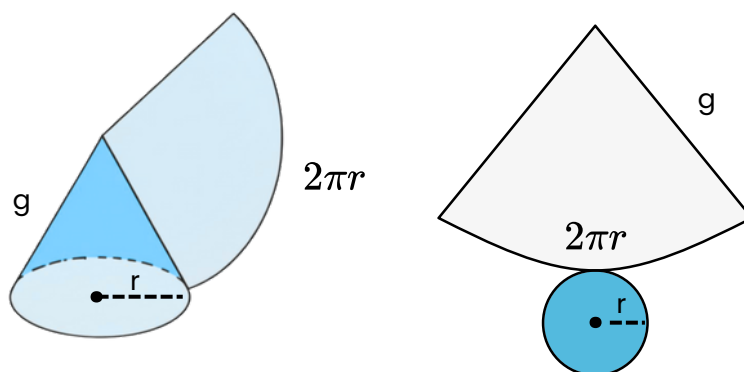
- **Altura** é a distância entre o vértice e o plano da base;
- **Área lateral** de um cone é a reunião das geratrizes;
- **Área total** é a soma da área lateral com a área do círculo da base.

Cálculo de Áreas

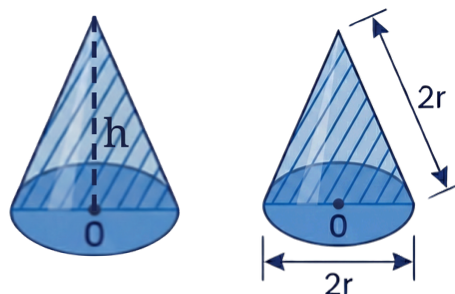
- A **área lateral** de um cone reto é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento do arco $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base).

- Dessa forma, a área lateral pode ser calculada como $A_L = \pi \cdot r \cdot g$

- Já a **área total** pode ser calculada por $A_t = \pi \cdot r(g + r)$



Além do já citado, temos a **secção meridiana** que é a interseção do cone com um plano que contém o seu eixo. A secção meridiana de um cone **reto** ou cone de **revolução** é um **triângulo isósceles**. Se a secção meridiana for um **triângulo equilátero**, temos um cone **equilátero** de dimensões: $h = r$ e $g = 2r$.

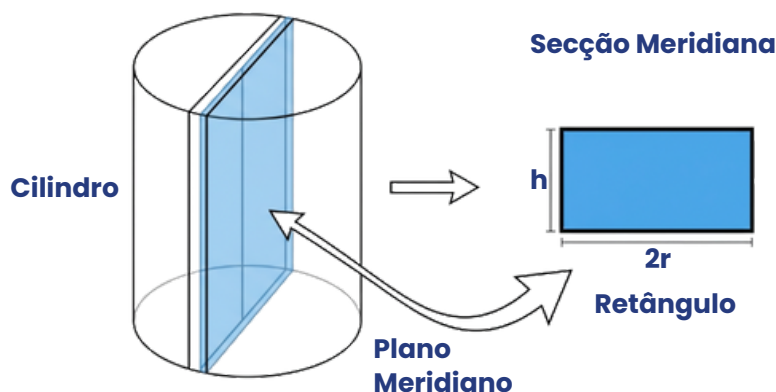


Secção Meridiana do Cilindro

A **secção meridiana de um cilindro** é um conceito fundamental na geometria espacial que descreve a forma geométrica resultante de um corte específico no sólido.

Definição

A **secção meridiana** é a figura plana obtida pela interseção de um cilindro com um plano que contém o seu eixo de rotação. Em outras palavras, é o "corte" que passa pelo centro do cilindro, dividindo-o em duas metades simétricas (dois semicilindros).



Características

Para um cilindro circular reto, a secção meridiana possui as seguintes características:

- **Forma:** A secção meridiana é sempre um retângulo.
- **Dimensões:**
 - A **altura** do retângulo é igual à **altura (h)** do cilindro.
 - A **base** do retângulo é igual ao **diâmetro (2r)** da base do cilindro.

Área da Secção Meridiana

A **área da secção meridiana** (A_{sm}) é, portanto, a área do retângulo resultante, calculada pela fórmula:

$$A_{sm} = base \cdot altura = 2r \cdot h$$

Cilindro Equilátero

Um caso especial é o **cilindro equilátero**, que é definido como um cilindro cuja **altura é igual ao diâmetro da base** ($h = 2r$). Nesse caso, a secção meridiana não é apenas um retângulo, mas sim um quadrado, pois seus quatro lados têm a mesma medida ($2r$).



Esferas

Por dentro da BNCC:

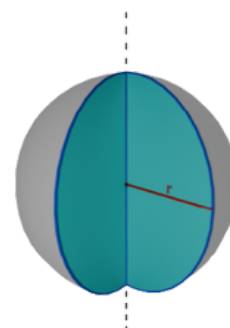
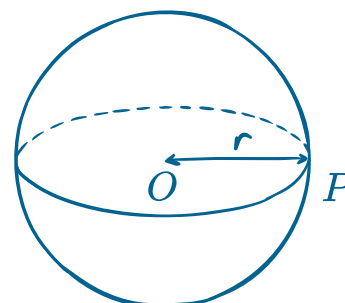
Habilidades:
EM13MAT307

A **esfera**, de centro O e raio r , é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é igual ou menor a r .

De outra forma, a esfera pode ser definida como um **sólido de revolução** gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro. A superfície dessa esfera é formada pelo conjunto de pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r .

- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando as esferas em **Realidade Aumentada**.

Observe a primeira Figura 5.7. Ela apresenta um semicírculo de raio r . Se fizermos esse semicírculo girar em torno do eixo pontilhado, ele gerará uma esfera.

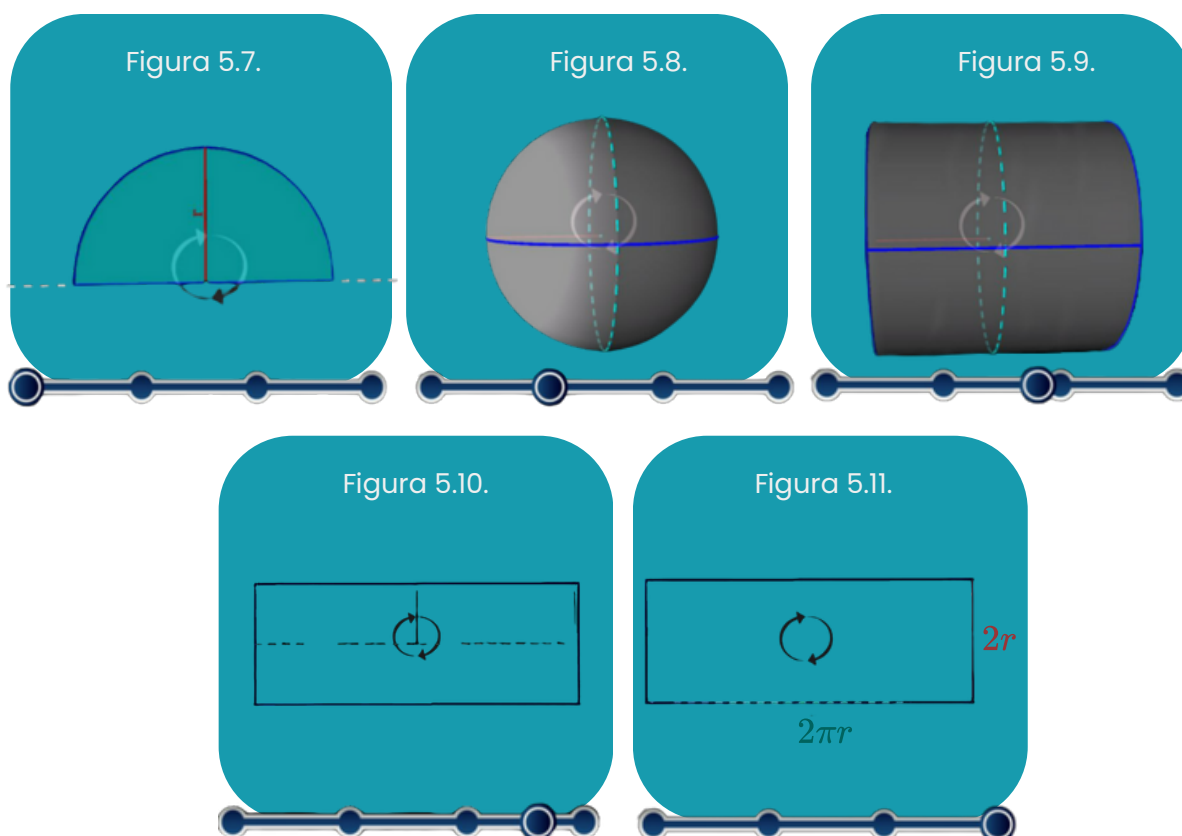


- Ao clicar e arrastar a barra para a direita, podemos ver que o semicírculo se transforma em esfera e se aproxima de um cilindro (Figura 5.8).
- Ao final da barra (Figura 5.9), a esfera se transforma em um **cilindro sem bases**, e então, o cilindro se **planifica** demonstrando que a área da superfície da esfera pode se igualar a área do retângulo cuja altura mede $2\pi r$ e a base mede $2r$.

Observando as Figuras 5.10 e 5.11, temos portanto, que a área da superfície da esfera é dada pela fórmula:

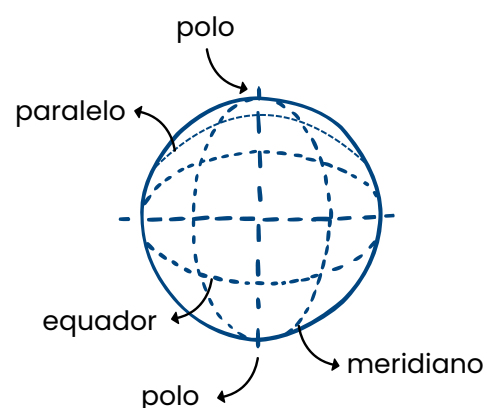
$$A_T = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Essa planificação aqui sugerida é proposta para fins didáticos, já que planificar um sólido significa representá-lo em um plano, o que requer a "abertura" de suas faces em uma superfície plana, o que não é possível para a esfera.



Os elementos da **esfera** são:

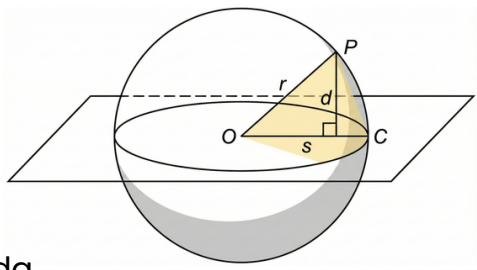
- **Polos**, que são as interseções da superfície com o eixo;
- **Equador** é a circunferência perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície;
- **Paralelo** é a circunferência paralela ao equador, ou seja, também perpendicular ao eixo;
- **Meridiano** é a circunferência cujo plano passa pelo eixo.



- Quanto às suas dimensões, temos que:
- A **distância polar** é a distância de um ponto qualquer de um paralelo ao polo;

- O **volume da esfera** é igual a $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

- O **área** é $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



- Para qualquer outro plano **secante**, a seção ainda é um **círculo**, porém com **raio menor** que o da esfera. Se chamarmos de s o raio da seção e de r o raio da esfera, vale a relação geométrica que permite calcular s a partir da posição do plano:

$$s^2 = r^2 - d^2$$

TEMA

5

5.3.

Relação entre Volumes do Cilindro e do Cone

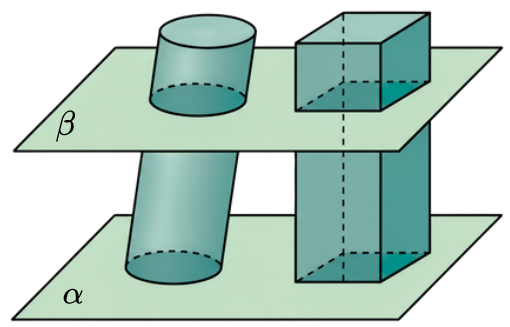
Por dentro da BNCC:

Habilidades:
 EF09MA19
 EM13MAT309
 EM103MAT504

◆ **Volume do cilindro:**

No cálculo da quantidade de água que pode ser guardada em um reservatório cilíndrico podemos utilizar conhecimentos acerca do volume do cilindro.

- Para estudarmos o volume do cilindro, utilizaremos as noções do **Princípio de Cavalieri**.
- Considere inicialmente um cilindro e um prisma com a mesma altura e com bases de mesma área contidas em um mesmo plano. Qualquer plano β , paralelo a α , que secciona os sólidos determina regiões de mesma área.



- Portanto, pelo **Princípio de Cavalieri**, o volume do cilindro é análogo ao do prisma. A fórmula geral para o volume de ambos é:

$$V = A_b \cdot h$$

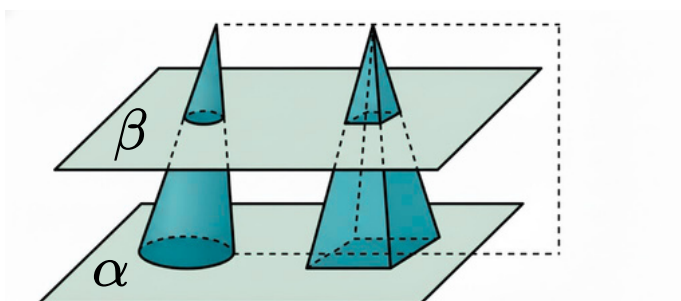
- No caso específico do cilindro, a base é um círculo e sua área (A_b) é dada por: $A_b = \pi r^2$

- Ao substituímos a área da base do círculo na fórmula geral do volume, obtemos a expressão para o volume do cilindro: $V = \pi r^2 h$



Volume do cone:

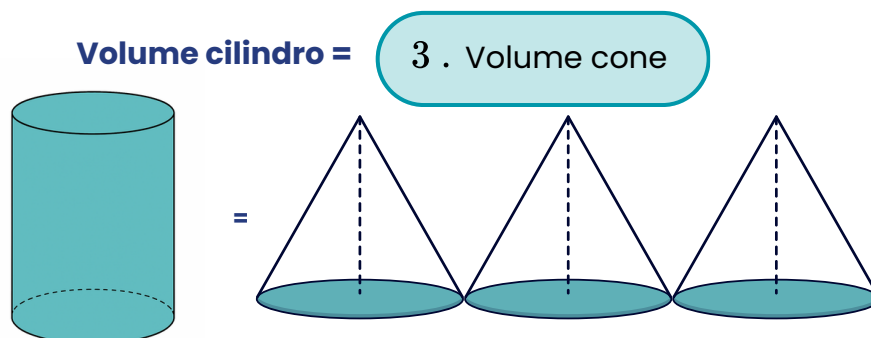
- Inicialmente, considere um cone e uma pirâmide com a mesma **altura** e com as bases de mesma área contidas em um mesmo plano α .
- Qualquer plano β , paralelo a α , que seccione os sólidos determinará regiões de mesma área.



- Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cone e o da pirâmide são iguais.
- Como o volume da pirâmide é dado por $V_p = \frac{A_b \cdot h}{3}$, temos que o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Também é possível verificar que, se um **cone** e um **cilindro** de mesma **altura** têm bases com **áreas iguais**, então o volume do **cone** corresponderá a **1/3** do volume do **cilindro**:

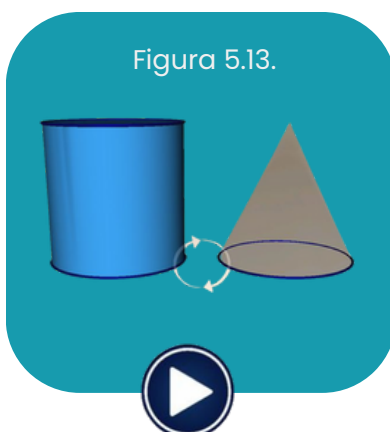
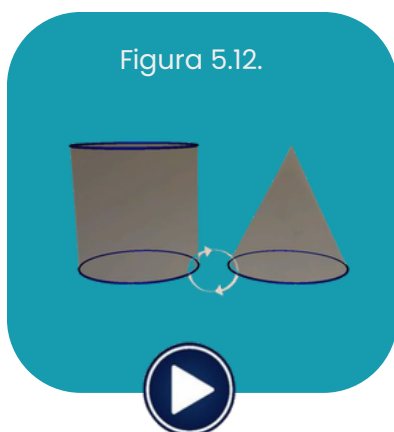


- Essa relação foi demonstrada há cerca de 2400 anos pelo grego **Eudoxo** (408 a.C.-355 a.C.), considerado o mais célebre astrônomo e matemático de seu tempo.

Volume de Sólidos de Revolução



- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir daremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando o **volume de sólidos de revolução** em Realidade Aumentada.
- Assim que você escanear o código, a tela abaixo será mostrada no seu dispositivo (Figura 5.12):



- Para assistir a animação, basta clicar no círculo com o símbolo "play". Inicialmente, aparecem a altura e o raio da base do cilindro e, em seguida, o cilindro se enche de água. Veja as Figuras 5.13 e 5.14 acima.
- Clicando em "play" novamente, o cilindro inicia a transferência do líquido para os 3 cones idênticos ao primeiro. Mostrando assim, dinamicamente, como o grego Eudoxo procedeu em sua demonstração.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Construindo Sólidos com Materiais Simples

- **Objetivo:**

- Compreender como os sólidos de revolução são formados e explorar sua construção prática a partir do giro de figuras planas.

- **Materiais:**

- Dispositivos móveis (celulares ou tablets);
- Códigos das páginas anteriores para visualização dos sólidos de revolução;
- Cartolina ou papel quadriculado.
- Massinha, argila ou outro material para modelagem.
- Lápis, régua, tesoura.

- **Passo a Passo:**

1. *Observação em Realidade Aumentada:*

- Divida os alunos em grupos.
- Cada grupo escolherá um dos códigos das páginas anteriores para visualizar o sólido em 3D usando o aplicativo de Realidade Aumentada.

- Oriente-os a observar atentamente como a figura plana (por exemplo, um triângulo retângulo ou um retângulo) gera o sólido ao girar em torno de um eixo.

2. *Desenho da Figura Geratriz:*

- Cada grupo desenhará, em cartolina ou papel quadriculado, a figura plana que origina o sólido escolhido (por exemplo, o retângulo que gera o cilindro).

3. *Modelagem Manual:*

- Usando massinha de modelar, argila ou papel, os alunos tentarão reproduzir o sólido, baseando-se no desenho da figura geratriz que fizeram e no modelo 3D observado.

4. *Comparação e Avaliação:*

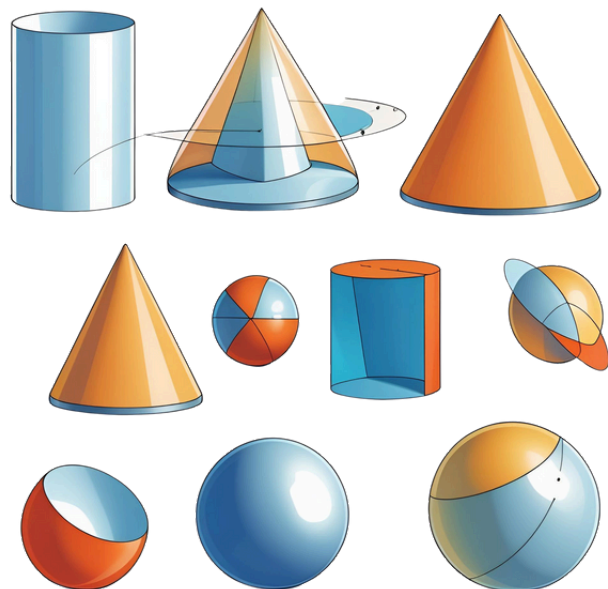
- Ao final, cada grupo vai comparar o modelo físico com a projeção virtual do sólido.

- Será feito um pequeno relato:
 - Como foi o processo de modelagem?
 - O que aprenderam sobre a formação do sólido?
 - Quais foram as dificuldades encontradas?



• **Dica para o Professor:** ★

- Para enriquecer a atividade, peça que calculem o volume do sólido modelado e comparem com o volume teórico.
- Você pode montar uma exposição na sala, mostrando os modelos produzidos pelos alunos ao lado das imagens geradas em RA.



• **Referências:**

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica.** São Paulo: Atual, 2013.
 PESCO, D.U.; ARNAUT, R.G.T. **Geometria básica.** v.2. 3.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2007.



Capítulo 6:

Equações e Inequações





Equações

- **Equação** é uma igualdade (=) envolvendo uma ou mais incógnitas.
- **Inequação** é uma sentença matemática expressa por uma desigualdade, relacionando uma ou mais variáveis por meio dos seguintes símbolos:
 - \neq (diferente de);
 - \leq (menor ou igual a);
 - $<$ (menor que);
 - \geq (maior ou igual a).
 - $>$ (maior que);

Por dentro da BNCC:

Habilidades:

EF06MA14
EF07MA13
EM13MAT301

A **equação** e a **inequação** têm o mesmo grau do **monômio** de maior grau de sua sentença.

Se a equação ou a inequação possui apenas uma incógnita, então, o **grau** dela é dado pelo maior expoente da incógnita.

Exemplo:

- $x^3 + 2x^2 + 5 = 0 \rightarrow$ terceiro grau, porque seu monômio de maior grau é x^3 .
- $x^2 - 1 < 0 \rightarrow$ segundo grau, porque seu monômio de maior grau é x^2 .
- $4xyz + 7yz^2 - 5x^2y^2z^2 = 0 \rightarrow$ grau 6, porque a soma dos expoentes de $-5x^2y^2z^2$ é 6.

Termo é o nome que se dá ao produto de algum **número** (coeficientes) por alguma **letra** (parte literal). Para identificá-los, basta procurar pelas multiplicações separadas por sinais de adição ou subtração.

Exemplo:

- $4x + 2x = 16 - 5x \rightarrow$ **Termos:** $4x$, $2x$, 16 e $-5x$.

Todos os termos dispostos **à esquerda** da igualdade ou da desigualdade compõem o **primeiro membro** de uma equação ou inequação.

Todos os termos dispostos **à direita** da igualdade ou desigualdade determinam o **segundo membro** de uma equação ou inequação.

Exemplo:

- $4x + 2x = 16 - 5x \rightarrow$ Primeiro membro: $4x + 2x$.
Segundo membro: $16 - 5x$.

Classificação das Equações

1. Equação Possível e Determinada: Possui um número finito de soluções. Exemplos:

$$2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ (uma única solução)}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3 \text{ (duas soluções)}$$

2. Equação Possível e Indeterminada: Possui infinitas soluções. Exemplos:

$$0x = 0 \text{ (qualquer valor de } x \text{ satisfaz)}$$

$$2x - 2x = 0 \rightarrow 0 = 0 \text{ (identidade - sempre verdadeira)}$$

3. Equação Impossível (SI): Não possui solução no conjunto considerado. Exemplos:

$$0x = 5 \text{ (impossível: zero vezes qualquer número nunca dá 5)}$$

$$x + 3 = x + 7 \rightarrow 3 = 7 \text{ (contradição)}$$

$$2x - 4 = 2x + 1 \rightarrow -4 = 1 \text{ (falso)}$$



Atividade sobre Equações

- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando as equações em **Realidade Aumentada**.

- Na primeira tela você irá clicar em **1**, selecionando, assim o nível inicial para a atividade. Veja a Figura 6.1.
- A tela que segue é uma **equação** e você precisa **retirar** ou **colocar** valores para que ela fique **equilibrada**, como ilustrado nas Figuras 6.2 e 6.3.
- No exemplo, temos $x + 6 = 10$, portanto, subtrai-se **6** de cada membro, resultando no valor **4** para x , pois $4 + 6 = 10$, equilibrando cada lado da balança.
- Na fase seguinte, o procedimento será o mesmo até a conclusão do jogo, no nível 5. Os níveis de dificuldade aumentam gradativamente, incorporando operações de multiplicação, divisão e o uso de números fracionários.

Figura 6.1

Selecione um NÍVEL

1

🔒

🔒

🔒

🔒

Figura 6.2

$x + 6 = 10$

$x + 6$ 10

+ -

0

▲ ▼

Figura 6.3

$x + 6 = 10$

$x + 6 - 6$ $10 - 6$

+ -

6

▲ ▼



Inequações

Propriedades da Desigualdade

Por dentro da BNCC:

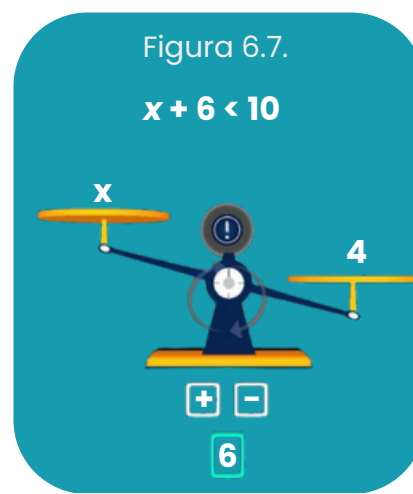
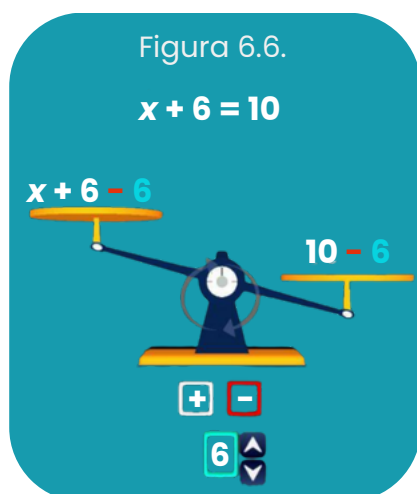
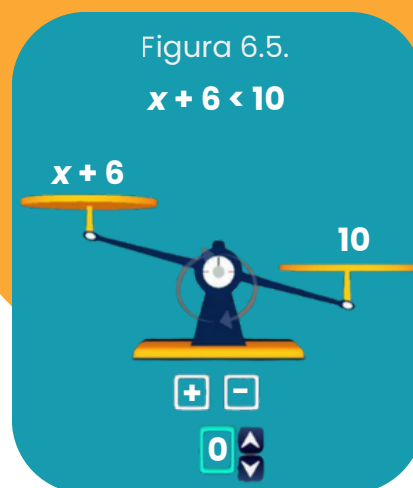
Habilidades:
EF06MA 24

- Somar qualquer número ou incógnita **nos dois membros** de uma inequação **não altera o sentido da desigualdade**.
- Subtrair qualquer número ou incógnita **nos dois membros** de uma inequação **não altera o sentido da desigualdade**.
- Multiplicar um número positivo em **ambos os membros** de uma inequação **não altera o sentido da desigualdade**.
- Multiplicar um número **negativo** em **ambos os membros** de uma inequação **inverte** o sentido da desigualdade.

Atividade sobre Inequações



- Para entender melhor sobre **Inequações**, aponte a câmera do seu dispositivo para o código ao lado e resolva as inequações conforme as instruções.
- Da mesma forma que nas equações, na primeira tela será apresentado o **nível 1** conforme a Figura 6.4 a seguir:



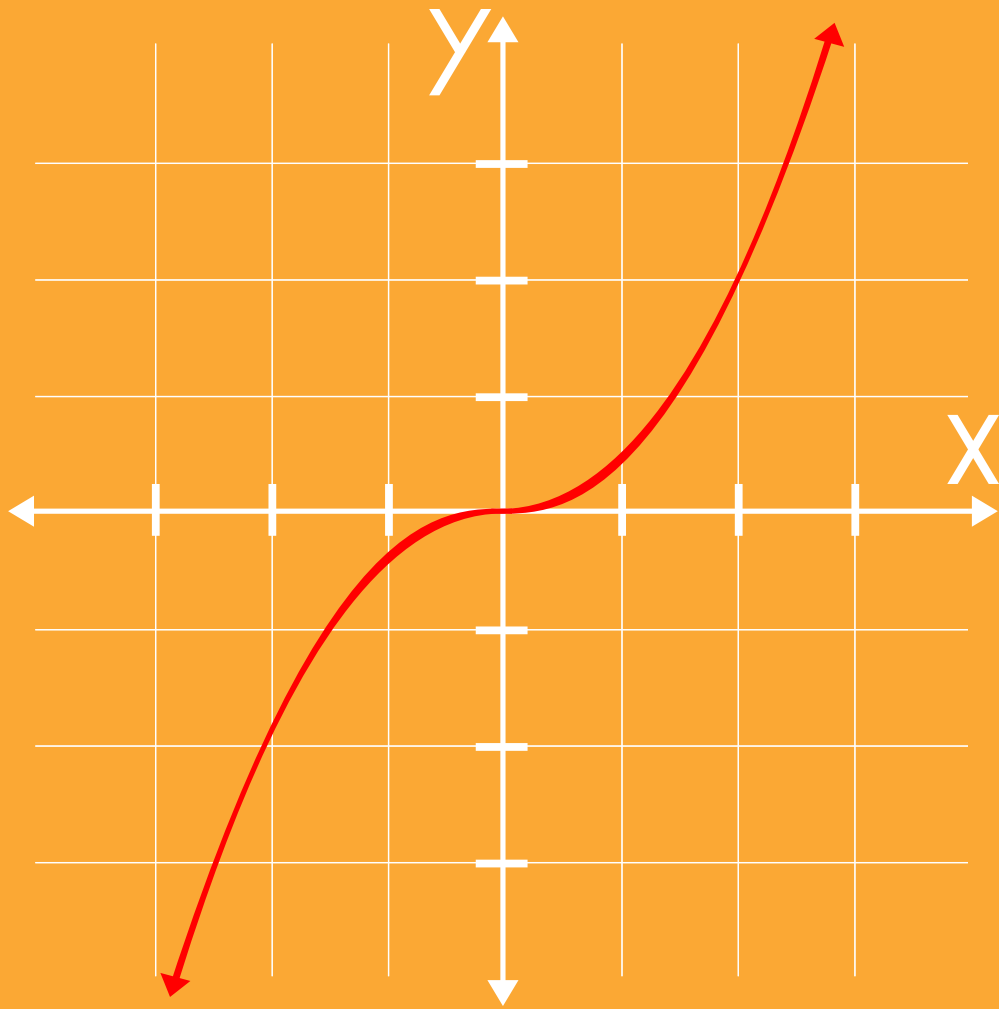
- Ao clicar no número **1**, uma inequação aparecerá sobre a balança (Figura 6.5). Você terá que aplicar as propriedades das **inequações** e descobrir qual o valor de x que torna a inequação verdadeira. Veja a equação do primeiro nível nas Figuras 6.6 e 6.7:



- Se $x + 6 < 10$, precisamos subtrair **6** de ambos os membros da desigualdade, para assim descobrirmos que x deve ser **menor do que 4**.

• **Referências:**

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática**, 7º ano: ensino fundamental, anos finais / Ênio. Silveira. – 5. ed. – São Paulo : Moderna, 2018.



Capítulo 7:

Funções Elementares





Noção de Funções

Definição de Função

Função é uma relação de um conjunto não vazio em outro conjunto também não vazio, em que cada elemento do primeiro conjunto se relaciona com um único elemento do outro.

Considere dois conjuntos não vazios **A** e **B**, em que uma função **f** relaciona cada elemento de **A** a um único elemento de **B**. O primeiro conjunto é chamado de **domínio**, e o segundo, **contradomínio** da função.

Podemos definir uma função utilizando uma lei de formação, em que, para cada valor de **x**, temos um valor de **f(x)**. Chamamos **x** de **domínio** e **f(x)** ou **y** de **imagem** da função.

Todo número real **x** que pertence ao domínio da função **f** e valida a equação **f(x) = 0** é denominado **zero da função f**.

Para construir o gráfico de uma função, usamos o sistema de **coordenadas cartesianas**. O gráfico da função fica determinado por todos os pontos do plano cartesiano representados pelos **pares ordenados (x, f(x))** que tenham **x** pertencente ao **domínio** de **f**.

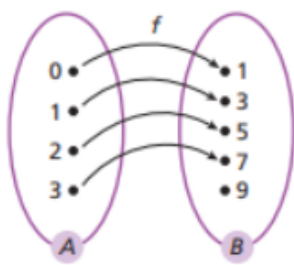
Tipos de função

Função injetora:

É uma função é injetora se os elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas.

- **Exemplo:**

A função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = 2x + 1$.



- O domínio (conjunto A) é $\{0, 1, 2, 3\}$.
- O contradomínio (conjunto B) é $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- A função $f(x) = 2x + 1$ gera as seguintes conexões:
 - Para $x = 0$, $f(0) = 2(0) + 1 = 1$.
 - Para $x = 1$, $f(1) = 2(1) + 1 = 3$.
 - Para $x = 2$, $f(2) = 2(2) + 1 = 5$.
 - Para $x = 3$, $f(3) = 2(3) + 1 = 7$.

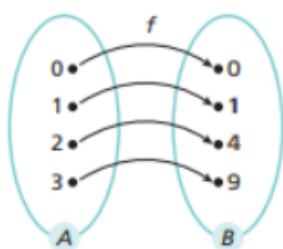
Observe que cada elemento do **domínio** aponta para um alvo exclusivo no **contradomínio**. Não há dois valores de entrada diferentes que compartilhem o mesmo resultado. Por essa razão, a função é **injetora**. É importante notar também que o elemento 9 no contradomínio não recebeu nenhuma seta. Isso não interfere na classificação como injetora, mas nos mostra que o **conjunto Imagem** $\{1, 3, 5, 7\}$ é **diferente** do **contradomínio**.

Função sobrejetora:

- É uma função **sobrejetora** se, e somente se, o seu conjunto **imagem** for especificamente **igual** ao **contradomínio**, $Im = B$.

- **Exemplo:**

A função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x^2$.



- As setas no diagrama nos mostram a aplicação da regra $f(x) = x^2$:
- O elemento 0 do domínio se conecta ao 0 no contradomínio (pois $0^2 = 0$).
- O elemento 1 do domínio se conecta ao 1 no contradomínio (pois $1^2 = 1$).
- O elemento 2 do domínio se conecta ao 4 no contradomínio (pois $2^2 = 4$).
- O elemento 3 do domínio se conecta ao 9 no contradomínio (pois $3^2 = 9$).

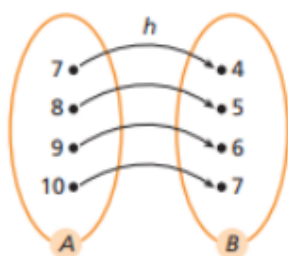
O conjunto **imagem** (os elementos de B que receberam uma seta) é $\{0, 1, 4, 9\}$. Note que este conjunto é exatamente igual ao **contradomínio B**. Como nenhum elemento de **B** ficou de fora, a função é **sobrejetora**.

Função bijetora:

- É uma função **bijetora** se ela é **injetora** e **sobrejetora**.

- **Exemplo:**

A função $f : A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x - 3$.



- O domínio (conjunto A) é $\{7, 8, 9, 10\}$.
- O contradomínio (conjunto B) é $\{4, 5, 6, 7\}$.

Vamos seguir a regra $f(x) = x - 3$:

- Para $x = 7$, $f(7) = 7 - 3 = 4$.
- Para $x = 8$, $f(8) = 8 - 3 = 5$.
- Para $x = 9$, $f(9) = 9 - 3 = 6$.
- Para $x = 10$, $f(10) = 10 - 3 = 7$.

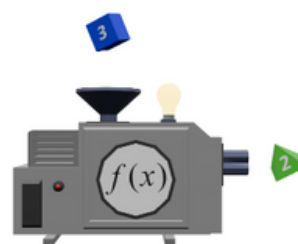
Analisando o diagrama, podemos concluir que a função é:

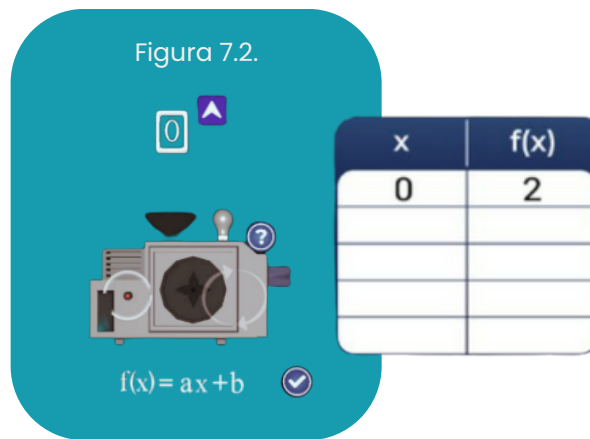
1. **Injetora**: Cada elemento do **domínio** tem uma **imagem** distinta no **contradomínio** (entradas diferentes geram saídas diferentes).
2. **Sobrejetora**: O conjunto **imagem** $\{4, 5, 6, 7\}$ é idêntico ao **contradomínio B**, ou seja, nenhum elemento de **B** ficou sem correspondente.

Como a função é simultaneamente **injetora** e **sobrejetora**, ela é classificada como **bijetora**.

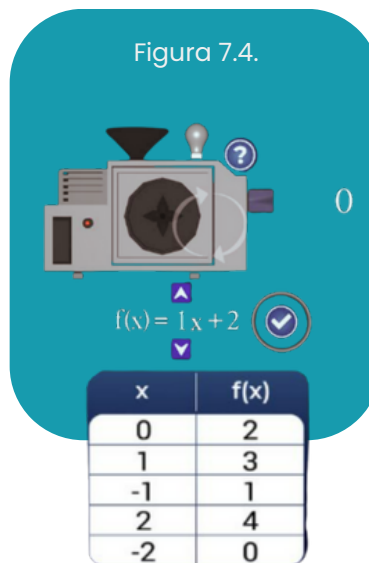
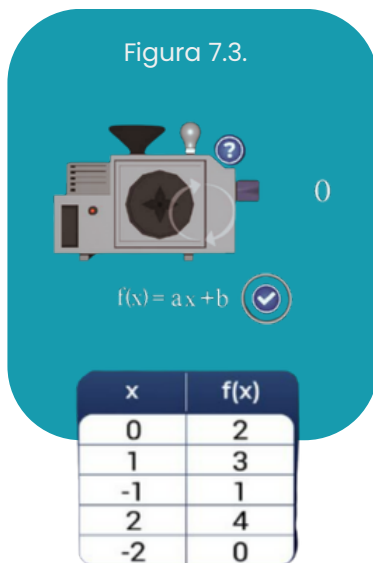
- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando os funções em **Realidade Aumentada**.

- A ideia da **Máquina de funções** é você escolher um valor para **x** clicando na **flecha** indicada na Figura 7.1 e, em seguida, clicar no botão vermelho para que a máquina lhe dê um resultado.
- Você deve repetir esta escolha **5 vezes**, após isso, você analisará os resultados na tabela e definirá os valores de **a** e **b** da função do exemplo.
- A cada função que você acerta, avança de nível. Veja a Figura 7.2:





- A seguir, escolhemos o **0** (zero) e a máquina nos deu como resultado o número **2**, e assim sucessivamente até o 5º valor na tabela.
- Após colocarmos todos os números, analisamos quais valores devem ser inseridos nos lugares de **a** e **b**.
- Clicamos no símbolo para conferir, caso esteja certo, a próxima fase é liberada.
- Repetimos o processo ilustrado nas Figuras 7.3 e 7.4 até a 5ª fase.



Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Máquina de Funções com Realidade Aumentada

- **Passo a Passo:**

- Introduza a atividade da "**Máquina de Funções**".
- Instrua os alunos a escanear os códigos em seus dispositivos.
- Explique o funcionamento da Máquina de Funções:
 - Escolher um valor para **x** (clikando na flecha).
 - Clicar no botão **vermelho** para obter o resultado.
 - Repetir a escolha 5 vezes.
 - Analisar os resultados na tabela para definir os valores de '**a**' e '**b**' da função.
- Pergunte aos alunos o que eles aprenderam ou consolidaram com a atividade interativa.
- Reforce a importância das funções na matemática e em diversas áreas do conhecimento.
- Sintetize os principais conceitos abordados na aula.

- **Avaliação:**

- A avaliação será contínua, observando a participação dos alunos nas discussões e na realização da atividade.
- Verifique se os alunos conseguem identificar os conceitos de função e seus tipos básicos.
- Observe a capacidade dos alunos de analisar os resultados da Máquina de Funções para determinar a lei de formação.
 - Clicar no **símbolo** para conferir a resposta.
 - A cada função acertada, eles avançarão de nível (até a 5ª fase).
- Circule pela sala, auxiliando os alunos que tiverem dificuldades com a plataforma ou com a compreensão da atividade.
- Incentive a discussão entre os alunos sobre as estratégias para descobrir os valores de '**a**' e '**b**'.

- **Conclusão:**

- Abra uma breve discussão sobre a experiência com a Máquina de Funções.

- **Observações:**

- Certifique-se de que todos os alunos tenham acesso a um dispositivo móvel e à internet antes da aula.
- Prepare o símbolo do QR Code de forma visível para que os alunos possam escanear.
- Adapte a complexidade dos exemplos e das leis de formação da Máquina de Funções de acordo com o nível da turma.



Imagem 7.5. Fonte: Canva IA.

Descrição: A imagem apresenta, em plano fechado e ângulo superior, uma mesa de estudos iluminada por uma luz central suave. O foco principal recai sobre uma calculadora preta, posicionada sobre diversas folhas de papel branco repletas de anotações, números e equações matemáticas manuscritas a lápis. Ao fundo, levemente desfocada, visualiza-se uma caneta prateada entre outros itens de papelaria, compondo um cenário que simboliza o esforço intelectual e a prática de resolução de problemas.



- **Referências:**

ASTH, Rafael C. "**Função Injetora**"; Toda Matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/funcao-injetora/>.

Acesso em 07 de outubro de 2025.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "**Tipos de Função**"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/tipos-de-funcao.htm>.

Acesso em 07 de outubro de 2025.

Equipe COM – OBMEP. "M_Sala de ajuda: **Funções – Injetividade, sobrejetividade e bijetividade**"; Clubes de Matemática da OBMEP. Disponível em: <https://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-ajuda-funcoes-injetividade-sobrejetividade-e-bijetividade/>.

Acesso em 07 de outubro de 2025.

"**Funções sobrejetora, injetora e bijetora**" em Só Matemática. Virtuoso Tecnologia da Informação, 1998–2025. Disponível em:

<https://www.somatematica.com.br/emedio/funcoes/funcoes6.php>

Acesso em 07 de outubro de 2025.

Função do 2º Grau

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF06MA25

Definimos como **função do 2º grau** ou **função quadrática**, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, uma função cujo domínio e o contradomínio correspondem ao conjunto dos números **reais**, e que possui a lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$. Onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$.

O gráfico da função quadrática é sempre uma **parábola** e possui elementos importantes, tais como:

- As **raízes** da função quadrática;
- O **vértice** da **parábola**.

Dependendo do valor do coeficiente **a**, a parábola pode apresentar duas formas de abertura: **concavidade voltada para cima** ou **concavidade voltada para baixo**.

- Se $a > 0$, a concavidade é para **cima** → o vértice é o **ponto de mínimo**, ou seja, o menor valor que $f(x)$ pode assumir.
- Se $a < 0$, a concavidade é para **baixo** → o vértice é o **ponto de máximo** da função, ou seja, maior valor que $f(x)$ pode assumir.

- O parâmetro **b** influencia a posição da parábola em relação ao **eixo y**, indicando se ela corta o eixo em um ramo **descendente** ou **ascendente**.
- O parâmetro **c** indica exatamente a ordenada do ponto onde a parábola cruza o **eixo y**. Ou seja, ele indica o valor do y no ponto onde a parábola corta seu eixo.
- Resolver uma equação do segundo grau significa encontrar os pontos onde o seu gráfico intercepta o **eixo das abscissas**.
- Para resolver a equação do 2º grau podemos utilizar vários métodos, sendo que um dos mais comuns é a aplicação da **Fórmula de Bhaskara**.

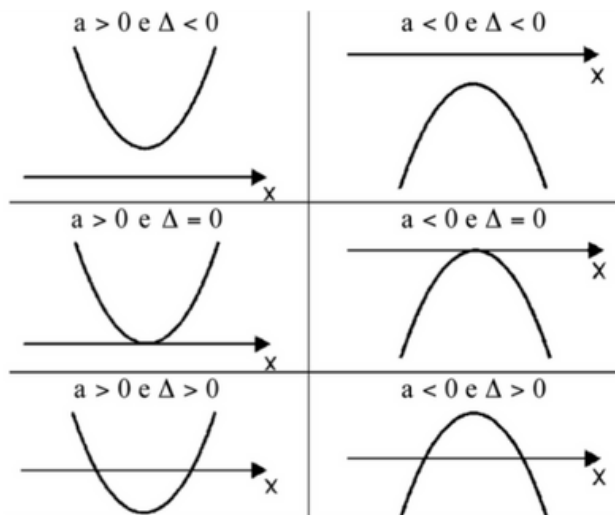
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A curva de uma função quadrática pode cortar o eixo x em, no máximo, dois pontos, chamando de **zeros** ou **raízes** da função, dependendo do valor do **discriminante** (Δ).

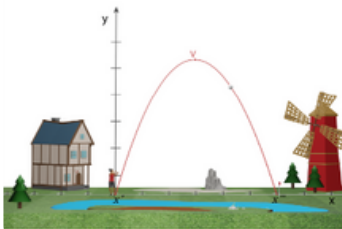
Assim, temos:

- Se $\Delta > 0$, o gráfico cortará o eixo x em **dois pontos**;
- Se $\Delta < 0$, o gráfico **não cortará** o eixo x ;
- Se $\Delta = 0$, a parábola tocará o eixo x em **apenas um ponto**.



Raízes da Função

Chamam-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.



- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando as raízes da função em **Realidade Aumentada**.



Esta atividade consiste em acertar a bolinha de golfe no buraco, em que o jogador é a primeira raiz da função x' e o buraco a segunda raiz x'' . Em cada nível, é dada uma função que você deverá resolver e incluir os resultados nos espaços indicados na tela.

Ao acertar, a tela se amplia e podemos verificar a bolinha caindo dentro do buraco. Veja as Figuras 7.9 e 7.10 abaixo:

Figura 7.9.

$$-x^2 + 3x = 0$$

$$x' = -3 \quad x'' = 0$$

Figura 7.10.

$$-x^2 + 6x = 0$$

$$x' = -3 \quad x'' = 0$$

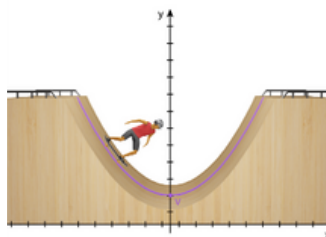
- Neste exemplo, todas as parábolas têm **concavidade voltada para baixo**.

Concavidade da Parábola

- Nesse exemplo, todas as parábolas tem **concavidade voltada para baixo**.
- O **vértice** da parábola é o ponto de **mínimo** ou de **máximo** do gráfico. Para encontrar o valor de **x e y no vértice**, utilizamos uma fórmula específica:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$



- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** à esquerda.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando a concavidade da parábola em **Realidade Aumentada**.

Figura 7.6.

$$f(x) = 0,5x^2$$

Figura 7.7.

$$f(x) = 1x^2$$

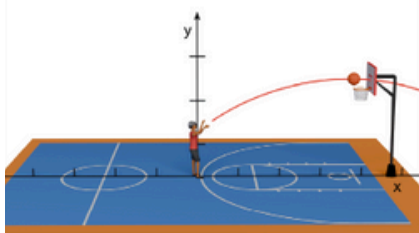
Figura 7.8.

$$f(x) = 2x^2$$

Nesse *card*, temos um exemplo de parábola cuja concavidade é voltada para baixo, ou seja, $a < 0$ e cujo coeficiente a varia.

Quando modificamos o valor de a para 0,5 a "largura" da parábola fica maior e a medida que trocamos para 1 e 2, a largura diminui, veja as figuras 7.6, 7.7 e 7.8.

Vértice da Parábola



- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando o vértice da parábola em **Realidade Aumentada**.



- Este tópico trabalha a ideia de um jogador de basquete que deve acertar a cesta. Consideramos o **vértice da parábola** sendo a **cesta**. Em cada nível, uma equação é dada e devemos calcular o vértice para então selecionarmos o valor encontrado, como mostra as Figuras 7.11, 7.12 e 7.13 abaixo.

Nível 1

Figura 7.11.
 $f(x) = -1/4 x^2 + 2x$

$x_v = 4$ $y_v = 4$

Nível 2

Figura 7.12.
 $f(x) = -3/4 x^2 + 3x$

$x_v =$ $y_v =$

Nível 3

Figura 7.13.
 $f(x) = -4/9 x^2 + 8/3x$

$x_v = -3$ $y_v =$

* Observe que neste exercício as parábolas tem **concavidade para baixo** e o aluno deve revisar os conteúdos sobre **operações com frações**.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1:

Criando novas equações de parábolas

- **Passo a Passo:**

- Com base no exemplo que analisamos no documento sobre a variação do coeficiente '**a**' e sua influência na 'largura' da parábola (mantendo a concavidade para cima), e utilizando os conceitos de concavidade, vértice e raízes, vocês deverão criar **três novas equações de parábolas diferentes.**

- **Requisitos para cada nova equação:**

- **Parábola 1:** Deve ter concavidade para cima (a maior que 0) e ser mais "estreita" que o exemplo inicial ($a = 2$, por exemplo).
- **Parábola 2:** Deve ter concavidade para baixo (a menor que 0) e cortar o eixo x em dois pontos distintos ($\Delta > 0$). Os alunos podem escolher valores para b e c que garantam isso.

- **Parábola 3:** Deve ter concavidade para cima (a maior que 0) e tocar o eixo x em apenas um ponto ($\Delta = 0$).
- Os alunos devem escrever a equação **$f(x) = ax^2 + bx + c$** para cada parábola criada e, para cada uma, indicar:
 - A **concavidade** (para cima ou para baixo).
 - O **ponto de vértice** (calculando as coordenadas x e y).
 - As **raízes**, se houver (calculando-as ou indicando que não há raízes reais).

- **Socialização e discussão**

- Solicitar que alguns alunos apresentem suas equações e as características correspondentes.
- Promover uma breve discussão sobre as diferentes equações criadas e como os coeficientes foram manipulados para atingir os objetivos.

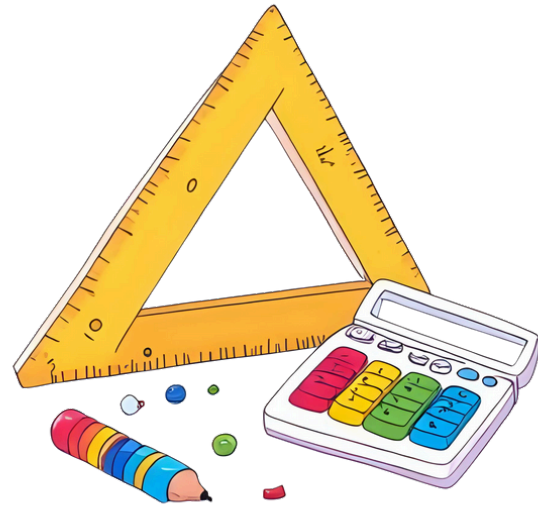
- Reforçar a compreensão da relação entre os coeficientes e o comportamento gráfico da função quadrática.

- **Avaliação:** ★

- Observação da participação dos alunos na discussão.
- Verificação da correta aplicação dos conceitos na criação das equações e na determinação das características das parábolas.
- Análise da capacidade de relacionar os coeficientes "**a**", "**b**" e "**c**" com as propriedades do gráfico.



Fonte: Canva IA.



Fonte: Canva IA.



- **Referências:**

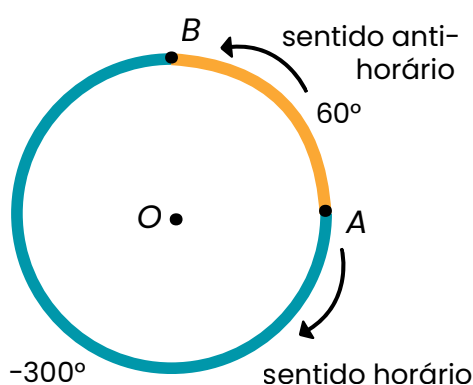
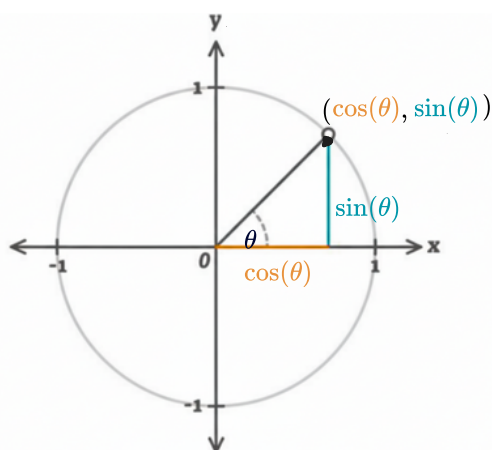
DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. São Paulo: Atual, 2013.

Trigonometria na Circunferência

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF06MA25

- As **funções trigonométricas**, também chamadas de funções circulares, relacionam os arcos da circunferência trigonométrica com suas projeções nos eixos do plano cartesiano.
- As principais funções trigonométricas são:
 - **Função Seno**;
 - **Função Cosseno**;
 - **Função Tangente**.
- No **círculo trigonométrico**, temos que cada número real está associado a um ponto da circunferência.



- As **funções trigonométricas** nada mais são que a relação entre o **ângulo** e o valor da **razão trigonométrica** para esse ângulo.
- Como podemos ver nas figuras acima, a circunferência trigonométrica, ou **ciclo trigonométrico**, tem centro na origem **O (0, 0)** de um plano cartesiano e raio de 1 unidade.
- No ciclo trigonométrico, o ponto **A (1, 0)** é a origem de todos os arcos, ou seja, é o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto B qualquer para determinar o arco \widehat{AB} (B é a extremidade do arco).

Funções Trigonométricas:

Função Seno

- A função $f(x) = a \operatorname{sen}(bx) + c$ é a forma geral da função **seno** (ou função seno transformada).

- Ela aparece muito no Ensino Médio quando estudamos gráficos de funções trigonométricas. Vamos entender cada parte da fórmula:

- **Forma geral da função Seno:** $f(x) = a \operatorname{sen}(bx) + c$

1. O coeficiente a → amplitude

- O valor de a indica o alongamento vertical da onda.
- A amplitude é o valor máximo (ou mínimo) que a função pode atingir em relação à linha média.
- Se $a > 0$, o gráfico mantém a orientação normal.
- Se $a < 0$, o gráfico fica espelhado em relação ao eixo horizontal.
 - Exemplo:

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}(x) \rightarrow \text{amplitude} = 2.$$

$$f(x) = -\operatorname{sen}(x) \rightarrow \text{amplitude} = 1, \text{ mas invertida.}$$

2. O coeficiente b → frequência (ou “compressão horizontal”)

- O valor de b altera o período da função, ou seja, o comprimento da repetição da onda.
- A fórmula do período (T) é:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

 - Exemplo:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \rightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x) \rightarrow T = 2\pi/2 = \pi$$

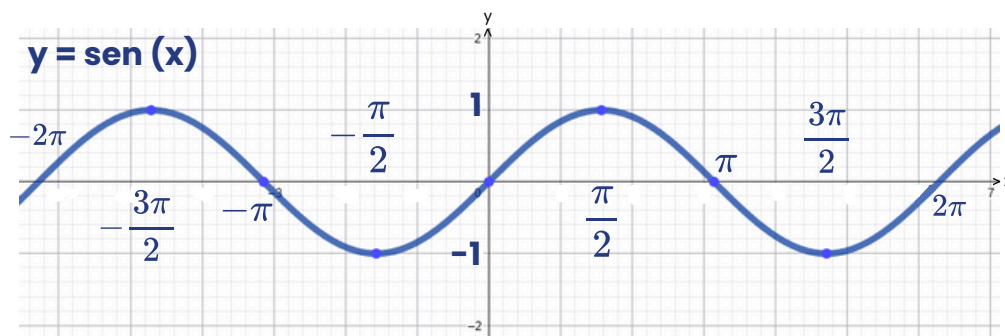
(a onda se repete duas vezes mais rápido).

3. O termo c → translação vertical

- O valor de c “move” o gráfico para cima ou para baixo.
- O eixo médio (linha de equilíbrio da onda) passa a ser $y = c$.
 - Exemplo:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + 2 \rightarrow \text{gráfico sobe 2 unidades.}$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) - 3 \rightarrow \text{gráfico desce 3 unidades.}$$



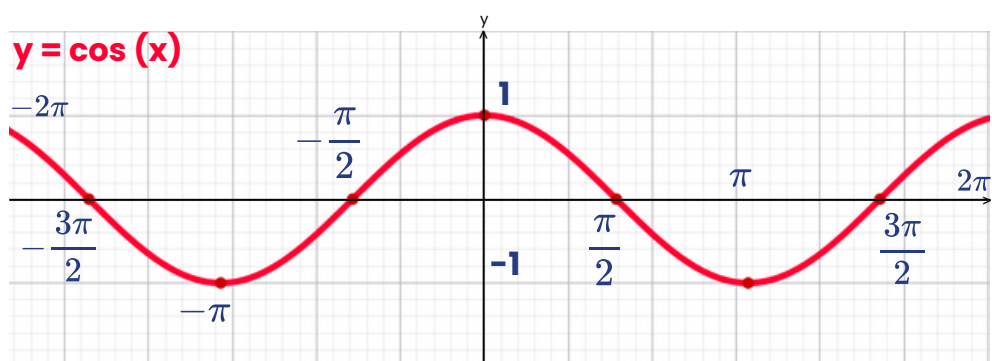
- O **domínio** está no conjunto dos **números reais**.
- A **imagem** da função seno está no intervalo $[-1, 1]$.
- A função seno é considerada uma função **ímpar**, ou seja, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$.
- O gráfico da função seno possui partes **crescentes** e partes **decrecentes**. Ele é conhecido também como **senoide**.

Função Cosseno

- A **função cosseno** é uma função periódica e seu **período** é 2π . Ela é expressa por: $f(x) = \cos x$.
- Forma geral da função cosseno: $f(x) = a\cos(bx) + c$
- No círculo trigonométrico, o **sinal** da função cosseno é **positivo (+)** quando x pertence ao **primeiro** e quarto **quadrantes**. Já no **segundo** e **terceiro** quadrantes, o sinal é **negativo (-)**.
- O domínio está no conjunto dos números **reais**.
- A **imagem** da função cosseno está no intervalo $[-1, 1]$.
- A função cosseno é considerada uma função **par**, ou seja, $\cos(-x) = \cos(x)$.

O gráfico da função cosseno, assim como a função seno, também possui comportamento **periódico**, com intervalos crescentes e decrescentes.

As funções **seno** e **cosseno** são análogas, por isso os parâmetros **a**, **b** e **c** as afetam da mesma maneira.



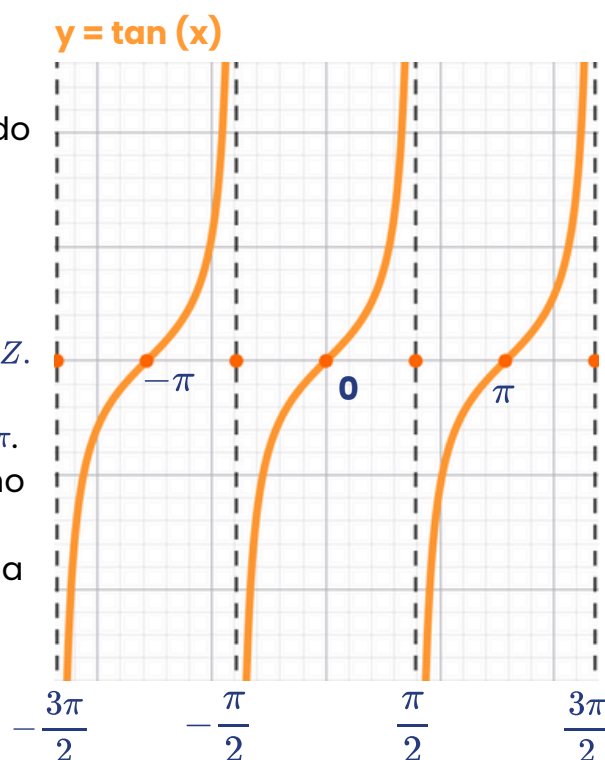
Função Tangente

- A **função tangente** é uma função periódica e seu período é π . Ela é expressa por: $f(x) = \tan x$.
- Forma Geral da Função tangente: $f(x) = a\tg(bx) + c$

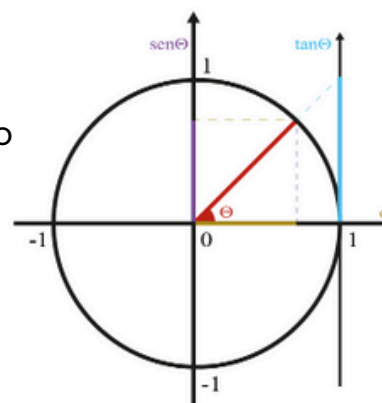
- No círculo trigonométrico, o sinal da função tangente é **positiva (+)** quando x pertence ao primeiro e terceiro quadrantes. Já no segundo e quarto quadrantes, o sinal é **negativo (-)**.
- O **domínio** da função tangente é:
 $Dom(tan) = x \in \mathbb{R} \mid x \neq de\pi/2 + k\pi; K \in \mathbb{Z}.$

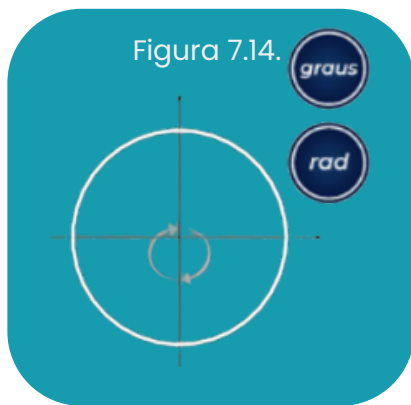
Assim, **não** definimos **tg x**, se $x = \pi/2 + k\pi$.

- A imagem da função tangente está no conjunto dos **números reais**.
- A função tangente é considerada uma **função ímpar**, ou seja,
 $\tan(-x) = -\tan(x).$
- O gráfico da função tangente $f(x) = \tan x$ é uma curva chamada de **tangente**.

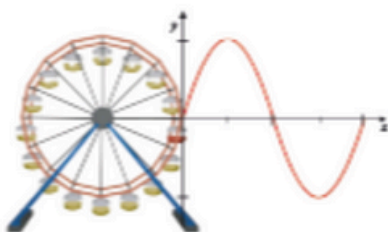


- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando o círculo trigonométrico e as funções em **Realidade Aumentada**.
- Nesta aplicação, você conseguirá visualizar as projeções dos **senos, cossenos e tangentes** dos arcos notáveis.
- A imagem inicial nos mostra um círculo, em que você seleciona grau ou radiano (Figura 7.14).

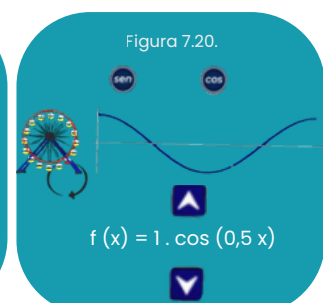
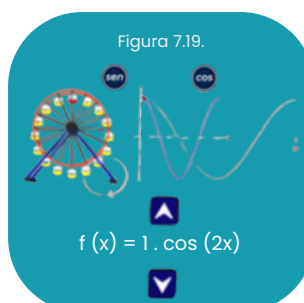
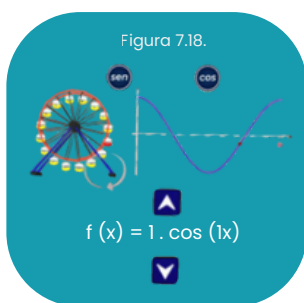




- Após a seleção, você clica no sinal de **(+)** ou **(-)**, em seguida na função que deseja visualizar (Figuras 7.15 e 7.16).



- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- Este tópico traz a ideia do gráfico de uma função trigonométrica a partir do movimento de uma das cabines de uma roda gigante.
- Ao acessarmos a plataforma, as instruções relacionadas à função cosseno são exibidas na tela, mostrando como esse movimento pode ser representado graficamente (Figura 7.17).



- Ao alterarmos os valores de **a** e **b** da função trigonométrica, o gráfico automaticamente altera a **amplitude** e o **período** da imagem, respectivamente. Veja as Figuras 7.18, 7.19 e 7.20.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Explorando Funções Trigonométricas com Realidade Aumentada

• **Objetivo:**

- Visualizar e compreender as projeções de seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis, e observar como a amplitude e o período de uma função trigonométrica são alterados.

• **Materiais:**

- Smartphone ou tablet.
- Acesso ao documento "Círculo trigonométrico e funções trigonométricas.docx" para escanear os códigos QR.

• **Passo a Passo:**

1. *Acesso ao Círculo Trigonométrico em RA:*

- Abra a plataforma no seu dispositivo, apontando a câmera para o código indicado pela seta no documento.
- Visualize o Círculo Trigonométrico em Realidade Aumentada.

- Reconheça a planificação correta de uma pirâmide.
- Selecione "grau" ou "radiano" na imagem inicial.
- Clique nos sinais de "+" ou "-" e, em seguida, na função que deseja visualizar (Seno, Cosseno ou Tangente).
- Observe as projeções dos senos, cossenos e tangentes dos arcos notáveis.

2. *Acesso ao Círculo Trigonométrico em RA:*

Aponte a câmera do seu dispositivo para o segundo código QR no documento.


- Acompanhe a instrução sobre a função cosseno que aparece na tela.

- Experimente alterar os valores de "a" e "b" na função trigonométrica (se a plataforma permitir a interação).
- Observe como a alteração desses valores impacta a amplitude (valor de "a") e o período (valor de "b") do gráfico da função.

3. *Discussão e Conclusão:*

- Discuta com os alunos como a Realidade Aumentada ajudou na visualização e compreensão dos conceitos de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico.



- Analise as mudanças nos gráficos das funções ao alterar os parâmetros "a" e "b", relacionando-as com os conceitos de amplitude e período.
- Peça aos alunos para descreverem a relação entre o movimento de uma cabine de roda gigante e o gráfico de uma função trigonométrica (conforme mencionado no documento).
- Esta atividade prática  proporciona uma abordagem visual e interativa para o aprendizado das funções trigonométricas, utilizando os recursos de **Realidade Aumentada**.

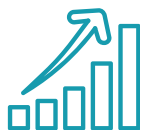
• **Referências:**

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a matemática** / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. 3. ed. — São Paulo: Moderna, 2016.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "**Funções trigonométricas**"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm>. Acesso em 22 de janeiro de 2025.



Função Exponencial



Por dentro da BNCC:

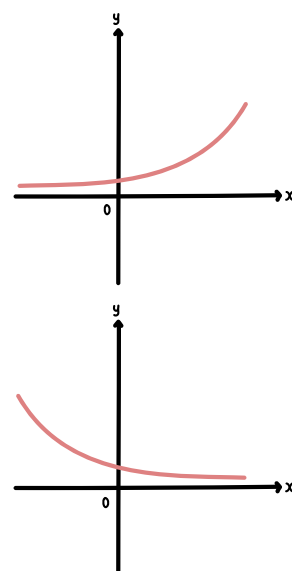
Habilidades:
EF06MA25

Definimos como função exponencial uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, ou seja, seu **domínio** é o conjunto dos **números reais**, e seu **contradomínio** é o conjunto dos números **reais positivos diferentes de 0**. Além disso, a sua lei de formação pode ser descrita por $f(x) = a \cdot b^x$, em que a é uma constante não nula, b é a base (uma constante positiva e diferente de 1), e x é a variável que se encontra no expoente.

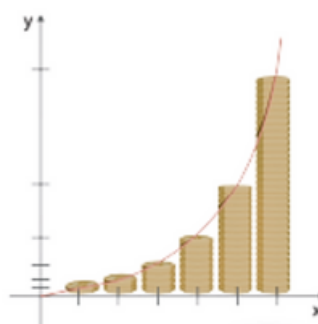
- Exemplos $\rightarrow f(x) = 2^x$ e $f(x) = 0,3^x$.

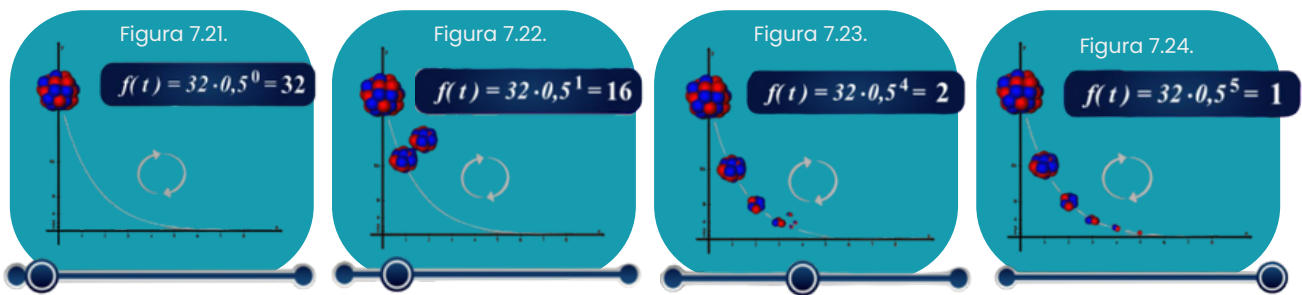
Tipos de função exponencial

- O gráfico da função $f(x) = a^x$ é **crecente** quando a base é um número maior do que 1, ou seja, quando $a > 1$. Nesse caso, quanto maior o valor de x maior será o valor de $f(x)$.
- A função exponencial é **decrecente** quando a base é um número maior que 0 e menor que 1, ou seja, quando $0 < a < 1$. Caso ela seja decrescente, quanto maior o valor de x menor será o valor de $f(x)$.



- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando a função exponencial decrescente em **Realidade Aumentada**.





- No exemplo do aplicativo, temos a equação $f(t) = 32 \cdot 0,5^x$. Na Figura 7.21, o valor de x é **0** (zero), o que resulta em **32** e assim, aparecem na imagem **32 esferas** representando microrganismos. Veja as Figuras 7.22, 7.23 e 7.24.
- Ao deslizar a barra para a direita, o valor de x aumenta, fazendo com que o número de esferas **diminua progressivamente**, aproximando-se de zero.
- Por ser a **inversa** da função exponencial, a **função logarítmica** possui um gráfico que é o reflexo **simétrico** do gráfico exponencial em relação à reta $y = x$.

Propriedades da função exponencial

- **1ª propriedade:** Em uma função exponencial, $f(0) = 1$.
- **2ª propriedade:** A função exponencial é **injetiva**. Isso significa que, para valores diferentes de x , a **imagem** também será diferente, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$.

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: Função Exponencial

- **Objetivo:**
 - Compreender a aplicação da **função exponencial** em situações de crescimento (ou decaimento) rápido, como a propagação de doenças ou o crescimento populacional.

- **Materiais:**

- Bolinhas de isopor (ou outro material pequeno e leve) em duas cores diferentes (ex: brancas e vermelhas).
- Um recipiente grande (bacia, caixa, etc.).
- Cronômetro.
- Lousa ou flip chart para registrar os dados.

- **Passo a Passo:**

- 1. *Introdução*

- Comece a aula explicando o que é uma função exponencial e seus principais conceitos (base, crescimento/decaimento, gráfico). Mencione que essa função é muito útil para modelar fenômenos de rápido crescimento ou decaimento, como a propagação de vírus.

- 2. *Preparação*

- Coloque no recipiente uma quantidade de bolinhas brancas (representando pessoas saudáveis) e apenas uma bolinha vermelha (representando uma pessoa infectada).
- Divida a turma em grupos pequenos (3-4 alunos).

- 3. *Rodada 1 (Tempo 0):*

- Peça a um aluno de cada grupo para "mexer" as bolinhas no recipiente por 5 segundos.

- Após 5 segundos, peça para contarem quantas bolinhas vermelhas existem no recipiente.
- Anote os resultados na lousa (Tempo 0: 1 bolinha vermelha).

- 4. *Rodada 2 (Após o 1º Contato):*

- Instrua os alunos a substituir cada bolinha branca que tocou uma bolinha vermelha por uma bolinha vermelha.
- Peça para mexerem novamente as bolinhas por 5 segundos.
- Contem as bolinhas vermelhas e registrem na lousa.

- 5. *Rodadas Consecutivas*

- Instrua os alunos a substituir cada bolinha branca que tocou uma bolinha vermelha por uma bolinha vermelha.
- Peça para mexerem novamente as bolinhas por 5 segundos.
- Contem as bolinhas vermelhas e registrem na lousa.

6. . Análise dos Dados:

- Com os dados registrados na lousa (tempo x número de bolinhas vermelhas), peça aos alunos para construírem um gráfico desses pontos.
- Guie a discussão para que percebam o crescimento acelerado, característico da função exponencial.
- Pergunte: "Qual é o padrão de crescimento que vocês observam?"
- Peça para tentarem identificar a base da função exponencial que melhor representa a propagação nesse modelo.

7. Discussão e Conclusão:

- Conecte a atividade com exemplos reais de propagação viral ou crescimento populacional.



- Discuta as implicações do crescimento exponencial em diferentes contextos.
- Peça aos alunos para formularem uma função exponencial que represente a "propagação" das bolinhas vermelhas no experimento.

8. Variações e Extensões:

- Para abordar o decaimento exponencial, pode-se iniciar com todas as bolinhas vermelhas e ir substituindo-as por brancas a cada rodada (simulando a cura ou a remoção do vírus).
- A atividade pode ser adaptada para simular o crescimento de bactérias, investimentos financeiros com juros compostos, etc.
- Utilize softwares ou aplicativos de gráficos para que os alunos possam visualizar e comparar a curva gerada pela atividade com a curva de uma função exponencial.

• Referências:

- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da matemática elementar**, 1. 7 ed. São Paulo: Atual editora, 2013.
- OLIVEIRA, Raul Rodrigues De. **Função exponencial. Mundo educação, 2024.** Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcao-exponencial.htm>. Acesso em: 10 fev. 2025.



Capítulo 8: Frações





Definição de Frações

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF06MA25

Fração é a representação matemática que expressa a relação entre uma parte e o todo, mostrando como uma quantidade pode ser dividida em pedaços ou partes iguais. Esse é um dos significados do conceito de fração – a parte-todo – entre outros, como quociente, medida, razão e operador.

- Em uma fração, o termo superior é chamado de **numerador** enquanto o termo inferior é chamado de **denominador**.
- Uma fração representa uma **divisão**, em que o numerador é o **dividendo** e o denominador o **divisor**, sendo o resultado o **quociente**.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Numerador} \\ \rightarrow \text{Denominador} \end{array}$$

Frações equivalentes

- São aquelas que representam o mesmo número racional. Isso significa que elas possuem o **mesmo valor**.

Exemplo: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Tipos de Fração

a) Própria: São frações em que o numerador é menor que o denominador, ou seja, representa um número menor que um inteiro.

Exemplo: $\frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{5}$

b) Imprópria: São frações em que o numerador é maior, ou seja, representa um número maior que o inteiro.

Exemplo: $\frac{7}{5}$

c) Aparente: São frações em que o numerador é múltiplo do denominador, ou seja, representa um número inteiro escrito em forma de fração.

Exemplo: $\frac{8}{4} = 2$

d) Mista: É constituída por uma parte inteira e uma fracionária representada por números mistos.

Exemplo: $1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

e) Decimal: São aquelas cujo denominador é uma potência de 10, ou seja, é igual a 10 ou 100 ou 1000 e assim por diante.

Exemplo: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$

- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando as frações em **Realidade Aumentada**.
- Assim que você abrir a plataforma, a tela abaixo será mostrada no seu dispositivo (figura 8.1.):



Figura 8.1.

Misto: 1, Decimal: 1,00, %: 100%

Figura 8.2.

Misto: $\frac{1}{2}$, Decimal: 0,50, %: 50%

Figura 8.3.

Misto: $1\frac{1}{2}$, Decimal: 1,50, %: 150%

- No quadrado branco, mude o número do denominador e veja como a pizza é dividida conforme o valor escolhido. Por exemplo, se você colocar o número 2 no denominador, a pizza será dividida em 2 partes iguais (figura 8.2).
- Observe que teremos a fração escolhida representada nas formas **mista**, **decimal** e **percentual**.
- Experimente trocar o numerador por um número maior que o denominador e veja como isso afeta o resultado da fração.
- A Figura 8.3 mostra **duas pizzas**:
 - uma dividida em duas metades, e a outra com apenas uma metade.
- Juntas, temos 3 “metades”, o que corresponde à fração $\frac{3}{2}$. Abaixo da imagem, também aparecem outras formas de representar essa quantidade.



• Referências:

OUVEIA, Rosimar. **Frações**. Toda Matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/fracoes/>. Acesso em: 21 jan. 2025

PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial 6º ano: ensino fundamental, anos finais, 1.ed.** São Paulo: Scipione, 2018.



TEMA

8

8.2.

Operações com Frações

Por dentro da BNCC:

Habilidades:
EF06MA25

a) Adição e subtração

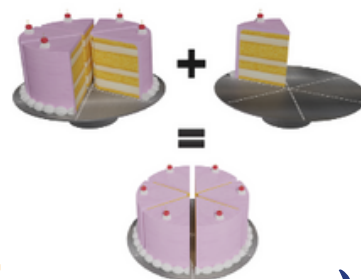
Para somar ou subtrair frações os **denominadores devem ser iguais**. Para realizar a operação, uma das formas possíveis consiste em:

- Calcular o **MMC** (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores;
- Trocar os denominadores antigos pelo MMC;
- **Dividir** o denominador atual pelo denominador anterior e **multiplicar** cada numerador pelos respectivos resultados;
- Somar ou subtrair os novos numeradores.

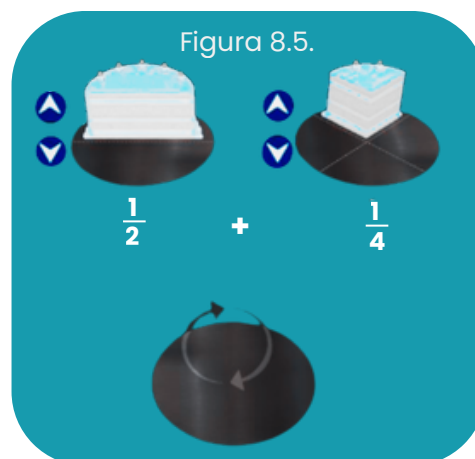
◦ Exemplo:

+ Soma $\rightarrow \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

- Subtração $\rightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$



- Para ajudar na compreensão e fixação deste objeto de conhecimento, aponte a câmera do seu celular ou tablet para o **QR Code** ao lado.
- A seguir, apresentaremos as instruções para acompanhar o conteúdo visualizando o conteúdo de soma de frações em **Realidade Aumentada**.



- Após abrir a plataforma, a Figura 1.1 aparece e você poderá clicar em 1.
- No **primeiro nível**, o objetivo é deixar os **denominadores iguais** para conseguir **somar** as frações.
- Use as setas para cima ou para baixo e veja os bolos sendo divididos conforme os valores escolhidos. Divida os dois bolos em partes equivalentes às frações iniciais, mas com denominadores iguais. Depois, clique na seta para ver o resultado da soma.
- Os níveis seguintes aumentam a dificuldade mas seguem pelo mesmo princípio.

b) Multiplicação

Para multiplicar frações, basta multiplicar **numerador** por **numerador** e **denominador** por **denominador**.

Exemplo: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$

c) Divisão

Para dividir frações, reescreva a divisão como uma **multiplicação conservando** a primeira fração intacta e **invertendo** numerador e denominador da segunda.

Exemplo: $\frac{2}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{1} = \frac{18}{3}$

Sugestão de Atividade em Sala de Aula



Atividade 1: "Desafio da Pizzaria "

- Dividir a turma em pequenos grupos.
- Propor situações-problema do cotidiano que envolvam adição de frações, como: "João comeu $\frac{1}{4}$ de uma pizza e Maria $\frac{1}{3}$ da mesma pizza. Que fração comeram juntos?", ou "Uma receita pede $\frac{3}{5}$ de xícara de farinha e $\frac{1}{2}$ de açúcar. Qual a quantidade total?", ou "Em um dia chuvoso, $\frac{2}{6}$ dos alunos vieram de ônibus e $\frac{1}{3}$ a pé. Qual a fração total?".
- Os grupos devem resolver mostrando o passo a passo da adição de frações, incluindo o MMC.

Referências:

OUVEIA, Rosimar. **Frações**. Toda Matéria. Disponível em:

<https://www.todamateria.com.br/fracoes/>. Acesso em: 21 jan. 2025.

PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial 6º ano: ensino fundamental, anos finais, 1.ed.** São Paulo: Scipione, 2018.

Sobre as autoras:



**Thaise Cechinel
Bozzelo Vassoler**

Professora de Matemática há mais de 20 anos, atuando no Ensino Fundamental II e Médio. Graduada em Matemática pela UFSC, é especialista em Gestão Escolar (FURB) e mestranda em Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) pela UFSC.



**Ananda Muxfeldt
Palma**

Graduada em Engenharia de Computação pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Membro do Laboratório de Tecnologias Computacionais (LabTeC - UFSC).



**Marcia Martins
Szortyka**

Professora da Coordenadoria Especial de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), possui Doutorado em Física pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Atua no Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF) e colabora com o Laboratório de Tecnologias Computacionais (LabTec-UFSC). Participou da equipe que desenvolveu o kit RA Matemática e atualmente ajuda na divulgação e implementação dos kits nas escolas da região.



**Juliana Pires da
Silva**

Técnica em assuntos educacionais na Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Araranguá. Mestre em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC). Coordenadora do Programa Institucional de Apoio Pedagógico na UFSC Araranguá. Atua como tutora na especialização de Educação Digital e Inovação Pedagógica (UFMS/UFSC) e como colaboradora do Laboratório de Tecnologias Computacionais (LabTec-UFSC). Participou da equipe que desenvolveu o kit RA Matemática e atualmente ajuda na divulgação e implementação dos kits nas escolas da região.



Eliane Pozzebon

Professora Titular do Departamento de Computação da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e atua na área de Inteligência Artificial. Coordena o Laboratório de Tecnologias Computacionais (LabTeC-UFSC) e lidera o Grupo de Pesquisa em Tecnologias Computacionais certificado pelo CNPq. Possui pós-doutorado em Inteligência Artificial pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), doutorado em Engenharia Elétrica e mestrado em Ciência da Computação pela UFSC. Suas pesquisas envolvem inteligência artificial aplicada à educação e à saúde, tecnologias imersivas, reconhecimento facial e iniciativas voltadas à inclusão de mulheres na computação.

Gostou desta leitura? Confira também:

Visite <http://labtec.ufsc.br/ebooks> para conhecer a coleção completa e conferir outros lançamentos.

